SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Bajević

KOORDINATNA METODA U STEREOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Prije četristotinjak godina, dok je bolestan ležao u krevetu i promatrao položaj muhe na stropu, René Descartes dobio je svoje prve ideje analitičke geometrije. Svojim djelom "Geometrija" iz 1637. godine otvorio je novo razdoblje u razvoju matematike primjenom koordinatnoga sustava i međusobno zavisnih promjenljivih veličina, uspostavljajući vezu između algebre i geometrije. Njegovo rješenje Pappusovog problema izneseno u "Geometriji" predstavlja početak shvaćanja funkcijske veze. Najveći Descartesov doprinos matematici uvođenje je Kartezijevog (pravokutnog) koordinatnog sustava.

Tema ovog rada je koordinatna metoda u stereometriji. U radu ćemo različite geometrijske teoreme i matematičke probleme stereometrije dokazati tako da ćemo odabrati pogodan koordinatni sustav i problem riješiti primjenom analitičke geometrije. Na razini srednjoškolske matematike različite stereometrijske probleme moguće je također riješiti metodom koordinata pa u radu navodimo i neke od njih.
Rad je strukturiran u četiri veća poglavlja.
U prvom smo poglavlju naveli povijesnu crticu o osnivaču analitičke geometrije - Renéu Descartesu. Nakon toga smo definirali Kartezijev koordinatni sustav u prostoru i naveli osnovne metričke relacije koje ćemo koristiti u radu te opisali pravce i ravnine. Na kraju poglavlja opisali smo koordinatnu metodu.
Drugo poglavlje donosi kratki pregled analogija između svojstava trokuta u ravnini i tetraedra u prostoru. Dokazi teorema provedeni su koordinatnom metodom.
Treće poglavlje bavi se svojstvima tetraedra. Sastoji se od niza teorema dokazanih koordinatnom metodom.
Četvrto poglavlje sadrži srednjoškolske stereometrijske probleme. Zadaci iz školskih udžbenika riješeni su koordinatnom metodom.
Sve slike uvrštene u rad izrađene su u programu dinamične geometrije GeoGebra.

Poglavlje 1

Kartezijev koordinatni sustav u prostoru

1.1 Povijesna crtica

Još u vrijeme antičke Grčke neki grčki matematičari, poput Apolonija i Arhimeda, koristili su pojmove *duljina*, *širina* i *visina* da opišu pozicije u prostoru, a zadaci koje danas smatramo algebarskima razmatrali su se geometrijski. Neki arapski matematičari, poput Al-Mahanija, pokušali su neke geometrijske probleme formulirati algebarski. Iako sami počeci analitičke geometrije sežu i u povijest staru više od 3000 godina, do uvođenja koordinata došlo je tek u 17. stoljeću.

Slika 1.1: René Descartes, [13]

Francuski filozof, fizičar i matematičar René Descartes rođen je 31. ožujka 1596. godine u mjestu Le Haye. Odgojio ga je otac budući da mu je majka umrla dok još nije imao godinu dana. U osmoj godini života započeo je školovanje u isusovačkome kolegiju La Flèche, koji je završio 1614. godine. La Flèche je bio odabir njegova oca, a na njegovom je čelu bio njihov dalji rođak koji je Descartesovo školovanje podredio njegovim naklonostima. Descartes je od rođenja bio boležljivo dijete. Zbog svojeg je zdravlja imao dozvolu ležati do 11 sati u krevetu. Kad je kasnije, 1647. godine, posjetio Pascala rekao mu je da je jedini način kako dobro raditi matematiku i sačuvati zdravlje ne ustati ujutro ranije nego što imaš potrebu za ustajanjem. Descartes je bio katolik vjeran tradiciji, ali sposoban biti kritičan prema svemu što ga okružuje i što je naslijedio. Na kolegiju je bio uspješan na svim područjima, no najviše je briljirao u geometriji. Descarstes je diplomirao civilno i kanonsko pravo na Sveučilištu u Poitiersu. Iako je uvijek bio najbolji na studiju i postigao najviše što se u to vrijeme u znanosti u školi mogao postići, bio je imućan student pa je u svojim studentskim danima vrijeme provodio u izlascima, mačevanju i jahanju. Nakon školovanja je 1618. godine stupio u vojsku i sudjelovao u Tridesetogodišnjem ratu. Postoje podaci da je Descartes svoje prve ideje analitičke geometrije dobio je u tri sna u noći 10. studenoga 1619. u doba ratovanja na Dunavu. Sljedeće godine izlazi iz vojske i provodi pet godina putujući Europom. Godine 1626. nastanio se u Parizu gdje se bavio konstrukcijama optičkih instrumenata, a godine 1629. nastanjuje se u Nizozemskoj gdje će sljedeće godine provesti posvećen matematici i filozofiji. Godine 1649. prihvaća poziv švedske kraljice Kristine da je poučava matematici. Kraljica Kristina zahtjevala je ranojutarnju poduku pa je René, suprotno svojim navikama, bio prisiljen u pet sati ujutro prolaziti hladan put iz jednog u drugi dio dvorca. U samo nekoliko mjeseci boravka u Stockholmu, Descartes je tako dobio upalu pluća i 11. veljače 1650. umro.

René Descartes je svoje prvo djelo „Rasprava o metodi“ sa dodacima „Dioptrija”, „Meteori” i „Geometrija” objavio u Leidenu 1637. godine. Ondje navodi pravila na kojima se zasniva metoda pravilnog spoznavanja i navodi primjer tih metoda u euklidskoj geometriji. Djelo „Meditacije“ objavljuje u Parizu, a ono je primjer primjene njegove čvrste logike. Svojim djelom „Geometrija“ Descartes otvara novo razdoblje u razvoju matematike primjenom koordinatnoga sustava i međusobno zavisnih promjenljivih veličina, kojima je uspostavljena veza između algebre i geometrije i zasnovana analitička geometrija. Descartes je dao niz važnih poučaka i metoda iz različitih područja matematike. U „Geometriji“ je utvrdio da Pappusov problem ima beskonačno mnogo rješenja koja za beskonačno mnogo različitih vrijednosti x rješavanjem jednadžbe njima pridružuju beskonačno mnogo vrijednosti y i tako dobiven skup točaka čini krivulju u ravnini. Ovo je predstavljalo početak shvaćanja funkcijske veze, koja je u općem smislu prihvaćena tek u 18. stoljeću. Inspiraciju za uvođenje koordinatne ravnine je Descartes prema anegdoti dobio promatrajući muhu na stropu. Jedan od najvećih doprinosa matematici je Kartezijev (pravokutni) koordinatni sustav koji je ime dobio po latinskoj inačici njegova imena - Cartesius. Među prvima je uočio da vrijedi osnovni teorem algebre, Eulerova formula, a 1638. godine proučavao je algebarsku krivulju trećeg stupnja $x^3 + y^3 = 3axy$ i našao njen točan oblik u prvom kvadrantu. Krivulja danas nosi ime „Descartesov list“. Godine 1644. objavio je djelo „Prirodna filozofija“ gdje je uveo pojam količine gibanja, otkrio zakon o lomu svjetlosti te tumačio nastanak duge.

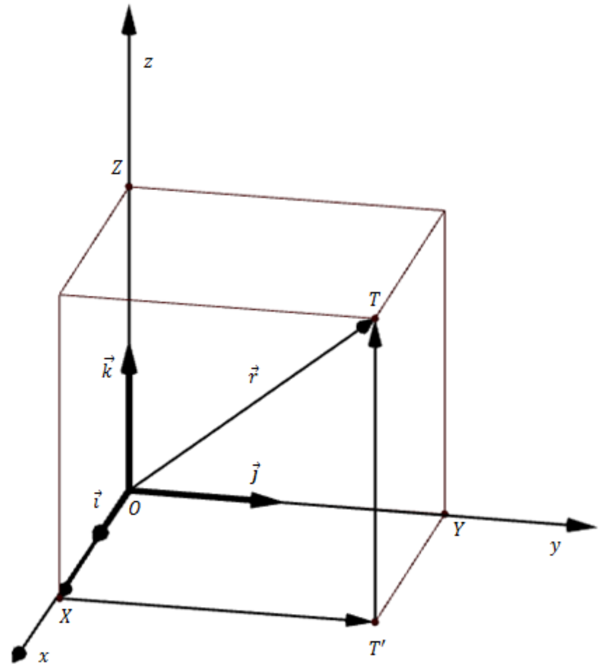
1.2 Kartezijev koordinatni sustav u prostoru

Najčešće korišten koordinatni sustav u analitičkoj geometriji prostora jest pravokutni **Kartezijev koordinatni sustav**. Koordinatne osi tog sustava čine tri međusobno okomita brojevna pravca Ox, Oy, Oz čije je sjecište točka O. Točka O ishodište je za svaki od ta tri brojevna pravca. Na pozitivnim dijelovima osi Ox, Oy, Oz nalaze se redom točke E_1, E_2, E_3, takve da vrijedi $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1$. Vektore $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ zovemo **jediničnim vektorima (ortovima)** u smjeru koordinatnih osi. Točku O nazivamo **ishodištem** koordinatnog sustava. Pravac Ox zove se ***x*-os** ili **os apscisa**, pravac Oy ***y*-os** ili **os ordinata**, a pravac Oz ***z*-os** ili **os aplikata**. Za ovako uvedeni koordinatni sustav upotrebljavat ćemo oznaku $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. **Koordinatne ravnine** su xy-ravnina, yz-ravnina i xz-ravnina, a određene su dvjema koordinatnim osima.

Koordinatni sustav ovisno o međusobnoj orijentaciji koordinatnih osi može biti lijevi i desni. U desnom (lijevom) koordinatnom sustavu koordinatne osi Ox, Oy i Oz imaju redom smjerove kao ispruženi palac, ispruženi kažiprst i savinuti srednji prst desne (lijeve) ruke. Formule izvedene za jedan od sustava vrijedit će i u drugom sustavu, a formule će u ovom radu biti izvedene za desni koordinatni sustav.

Položaj neke točke T u prostoru jednoznačno je određen njezinim **vektorom položaja** ili **radijvektorom** $\overrightarrow{OT} = \vec{r}$. Uvedimo na svaku koordinatnu os pravokutnog Kartezijevog sustava u prostoru koordinatni sustav na pravcu. Položimo li nekom točkom T prostora ravnine paralelne s koordinatnim ravninama, one će sjeći koordinatne osi x, y, z redom u točkama X, Y, Z.

Realne brojeve x, y, z takve da je $\overrightarrow{OX} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OY} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OZ} = z\vec{k}$ zovemo **koordinatama točke** T. Dakle, svakoj točki T prostora pridružena je uređena trojka (x,y,z) realnih brojeva gdje broj x nazivamo **apscisom** točke T, y **ordinatom** točke T, a z **aplikatom** točke T. Želimo li točki prostora T pridružiti njene koordinate označavat ćemo to sa $T(x, y, z)$. Na ovaj smo način definirali bijekciju između skupa točaka u prostoru i skupa $\mathbb{R}^3$ svih uređenih trojki realnih brojeva.



Slika 1.2: Radijvektor točke T

Sada kad smo definirali sve potrebne komponente sa slike 1.2 vidimo da vrijedi:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XT'} + \overrightarrow{TT'}.$$

Kako je $\overrightarrow{XT'} = \overrightarrow{OY}$ i $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{OZ}$, onda je:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ},$$

odnosno:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.1}$$

Neka je $\vec{a}$ bilo koji vektor prostora $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Promatrat ćemo njegov reprezentant kojemu je početak u ishodištu koordinatnog sustava. Taj je reprezentant tada radijvektor neke točke pa prema 1.1 postoje realni brojevi a_x, a_y, a_z takvi da je:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Realni brojevi a_x, a_y, a_z su koordinate vektora $\vec{a}$, što simbolički označavamo sa $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Sa slike 1.3 uočavamo da je $\left|\vec{a}\right|$ duljina dijagonale nacrtanog paralelepipeda, pa vrijedi:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.2}$$

Neka su α, β, γ kutovi što ih vektor $\vec{a}$ zatvara redom s vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Iz 1.2 slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{1.3}$$

Brojeve $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zovemo **kosinusima smjera** vektora $\vec{a}$. Iz 1.3 slijedi:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Kosinusi smjerova nekog vektora $\vec{a}$ koordinate su jediničnog vektora $\vec{a_0}$ u smjeru tog vektora. Odnosno vrijedi:

$$\vec{a_0} = \frac{a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

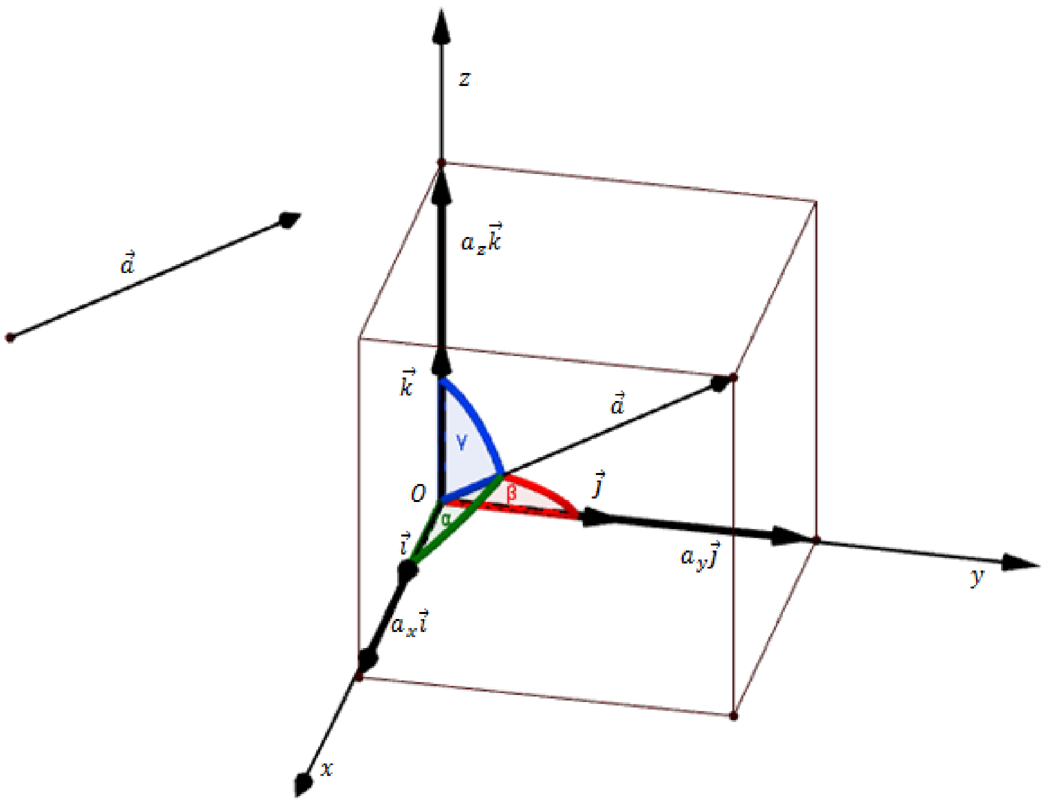
Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri vektora prostora $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pri čemu je:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\\
\vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},\\
\vec{c} &= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}.
\end{aligned}$$

Analogno kao u ravnini, odmah se vidi da vrijedi:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k},$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha a_x\vec{i} + \alpha a_y\vec{j} + \alpha a_z\vec{k}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$



Slika 1.3: Vektor $\vec{a}$

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je broj:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Teorem 1.2.1. *Skalarni produkt vektora* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ *jednak je:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ takav da je:

$$|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Ako je $|\vec{c}| > 0$, onda je $\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$, pri čemu uređena trojka vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ čini desni sustav.

Teorem 1.2.2. *Neka su dani vektori* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. *Tada vrijedi:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je broj:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

1.3 Osnovne metričke relacije

Udaljenost dviju točaka. Neka su $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$ dvije točke prostora, a $\vec{r_A}$ i $\vec{r_B}$ njihovi radijvektori. Tada je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$. Kako je $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ slijedi da je:

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru. Podijeliti dužinu $\overline{AB}$ u zadanom omjeru $\lambda : 1$ znači odrediti točku T (djelišnu točku) unutar te dužine takvu da vrijedi:

$$\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TB} = \lambda : 1,$$

odnosno:

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB}.$$

Ako su $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$ koordinate zadanih točaka, a $T(x, y, z)$ koordinate tražene točke, onda vrijedi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} &= \lambda \cdot \overrightarrow{TB}, \\ \{x - x_A, y - y_A, z - z_A\} &= \lambda \cdot \{x_B - x, y_B - y, z_B - z\}. \end{aligned}$$

Sada iz jednakosti dvaju vektora slijedi:

$$\begin{cases} x - x_A = \lambda x_B - \lambda x \\ y - y_A = \lambda y_B - \lambda y \\ z - z_A = \lambda z_B - \lambda z, \end{cases}$$

odnosno:

$$\begin{cases} x(1+\lambda) = x_A + \lambda x_B \\ y(1+\lambda) = y_A + \lambda y_B \\ z(1+\lambda) = z_A + \lambda z_B. \end{cases}$$

Iz ovoga slijedi da su koordinate tražene točke T:

$$T\left(\frac{x_a + \lambda x_B}{1+\lambda}, \frac{y_a + \lambda y_B}{1+\lambda}, \frac{z_a + \lambda z_B}{1+\lambda}\right).$$

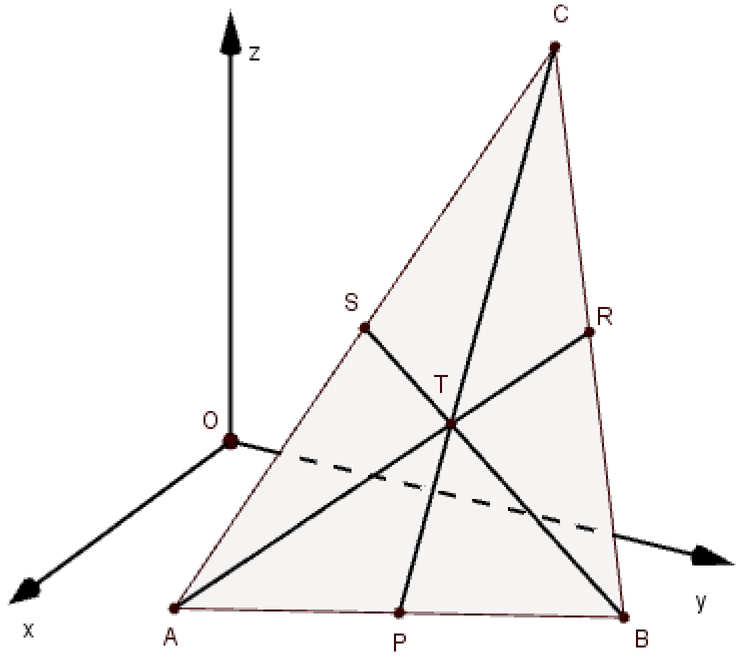
Polovište dužine. Posebno, točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ ako vrijedi: $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = 1 : 1$, odnosno ako je $\lambda = 1$. Uvrštavanjem u formulu za računanje koordinata djelišne točke dobivamo da su koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ jednake:

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Primjer 1.3.1. *Neka je u ravnini dan trokut $\triangle ABC$ gdje su $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$. Odredimo koordinate težišta trokuta $\triangle ABC$.*

Težišnica trokuta je dužina koja spaja njegov vrh s polovištem nasuprotne stranice. **Težište** trokuta je točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice trokuta. Težište trokuta dijeli svaku od težišnica u omjeru $2 : 1$ računajući od vrha trokuta. U sljedećem tekstu pomoću koordinatne metode dokazat ćemo da se sve tri težišnice trokuta u prostoru sijeku u jednoj točki koja ih dijeli u omjeru $2 : 1$ mjereći od vrha trokuta.
Neka je točka P polovište dužine $\overline{AB}$, točka R polovište dužine $\overline{BC}$, a točka S polovište dužine $\overline{AC}$. Tada su koordinate točaka P, R i S jednake:

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right),$$
$$R\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right),$$
$$S\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_A}{2}\right).$$



Slika 1.4: Trokut ABC i njegovo težište

Dužine $\overline{AR}$, $\overline{BS}$ i $\overline{CP}$ težišnice su trokuta $\triangle ABC$.
Odaberimo na težišnici $\overline{AR}$ točku T_1 takvu da vrijedi $|AT_1| = \frac{2}{3}|T_1R|$. Prema formulama za koordinate djelišne točke, gdje je $\lambda = 2$, imamo:

$$x_{T_1} = \frac{x_A + 2 \cdot \frac{x_B + x_C}{2}}{1+2},$$

$$y_{T_1} = \frac{y_A + 2 \cdot \frac{y_B + y_C}{2}}{1+2},$$

$$z_{T_1} = \frac{z_A + 2 \cdot \frac{z_B + z_C}{2}}{1+2},$$

odnosno:

$$T_1\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Odaberimo sada na težišnici $\overline{BS}$ točku T_2 takvu da vrijedi $|BT_2| = \frac{2}{3}|T_2S|$. Ponovnom primjenom formula za koordinate djelišne točke, gdje je $\lambda = 2$, dobivamo:

$$T_2\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Analogno, na težišnici $\overline{CP}$ odaberimo točku T_3 takvu da vrijedi $|CT_3| = \frac{2}{3}|T_3P|$. Primjenom formula za koordinate djelišne točke, gdje je $\lambda = 2$, dobivamo:

$$T_3\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Sve se tri odabrane točke podudaraju u svojim koordinatama pa zaključujemo da se sve tri težišnice trokuta sijeku u jednoj točki T - težištu trokuta čije su koordinate:

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Točka T dijeli težišnice u omjeru 2 : 1 mjereći od vrha trokuta.

1.4 Jednadžbe pravca i ravnine u prostoru

Pravac u prostoru

Pravac p u prostoru određen je jednom svojom točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom smjera $\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \{a, b, c\}$. Neka je $T(x, y, z)$ proizvoljna točka pravca p. Tada se vektori $\vec{p}$ i $\overrightarrow{T_0T}$ mogu zapisati kao: $\overrightarrow{T_0T} = \lambda\vec{p}$, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sa slike 1.5 vidimo da vrijedi: $\overrightarrow{T_0T} = \vec{r} - \vec{r_0}$, odnosno:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{p},$$

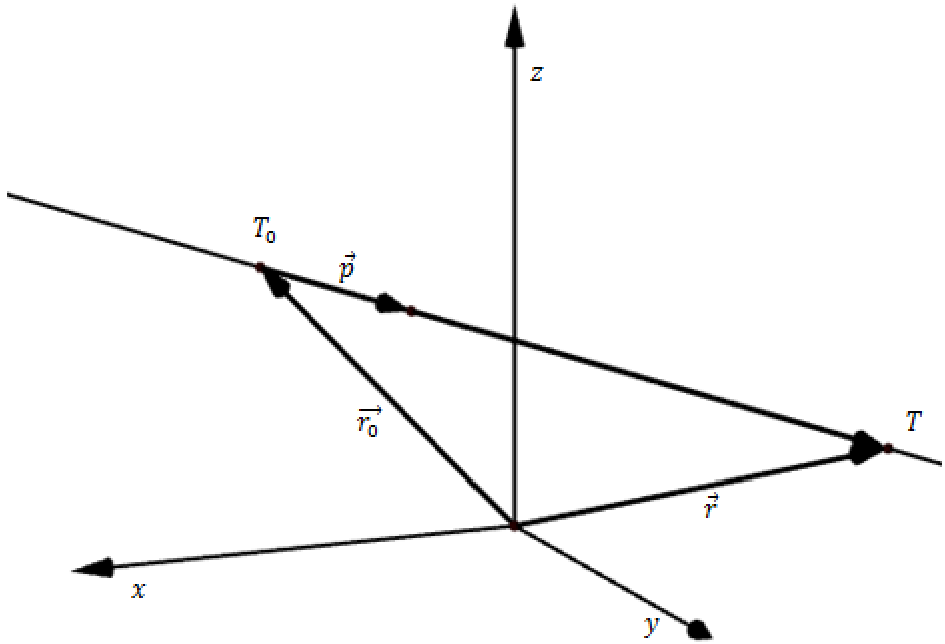
što zovemo **vektorskim oblikom jednadžbe pravca**.
Zapišemo li tu jednadžbu koordinatno dobivamo:

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} &= (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) + \lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}), \\ x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} &= (x_0 + \lambda a)\vec{i} + (y_0 + \lambda b)\vec{j} + (z_0 + \lambda c)\vec{k}, \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c, \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.4}$$

što zovemo **parametarskim oblikom jednadžbe pravca**. Svakoj točki pravca p odgovara točno jedna vrijednost parametra λ i obratno.



Slika 1.5: Pravac u prostoru

Eliminacijom parametra λ iz 1.4 slijedi:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ovakav oblik jednadžbe pravca zovemo **kanonskim oblikom jednažbe pravca**.

Pravac p u ravnini može biti zadan i s **dvije točke** koje mu pripadaju. Neka je pravac p određen točkama $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Ovakav je način zadavanja pravca analogan prethodnom - pravac smo zadali točkom $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom smjera $\overrightarrow{T_1T_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Jednadžbe pravca p u kanonskom i parametarskom obliku sada glase:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

odnosno:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_0 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_0 + \lambda(z_2 - z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ravnina u prostoru

Neka je u prostoru ravnina π određena jednom svojom točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom normale $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \{A, B, C\}$. Neka je $T(x, y, z)$ proizvoljna točka ravnine π. Vektor $\overrightarrow{T_0T}$ tada leži u ravnini π i njegove su koordinate: $\overrightarrow{T_0T} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Vektor normale $\vec{n}$ ravnine π okomit je na svaki vektor koji leži u ravnini pa tako i na vektor $\overrightarrow{T_0T}$. Slijedi da je skalarni umnožak vektora $\vec{n}$ i $\overrightarrow{T_0T}$ jednak:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0,$$

što zovemo **vektorskim oblikom jednadžbe ravnine**, odnosno:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

što zovemo **algebarskim oblikom jednadžbe ravnine**.

Izmnožimo li izraze u posljednjoj relaciji dobivamo:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdje je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Ovakav oblik jednadžbe ravnine zovemo **kanonskom** ili **općom jednadžbom ravnine**. Ukoliko je $D = 0$, ravnina π prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

Iz kanonskog (općeg) oblika jednadžbe ravnine dijeljenjem s $D \neq 0$ dobivamo:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

što zovemo **segmentnim oblikom jednadžbe ravnine**, gdje su $p = \frac{-D}{A}$, $q = \frac{-D}{B}$, $r = \frac{-D}{C}$ duljine segmenata na koordinatnim osima.

Ravninu π, osim točkom i vektorom normale, možemo zadati i s **tri nekolinearne točke** $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$ koje joj pripadaju.
Neka je točka $T(x, y, z)$ proizvoljna točka ravnine π. Tada su vektori $\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}$ komplanarni pa im je mješoviti produkt jednak nuli. Imamo:

$$(\overrightarrow{T_1T} \times \overrightarrow{T_1T_2}) \cdot \overrightarrow{T_1T_3} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ **od ravnine** $Ax + By + Cz + D = 0$ definira se kao udaljenost točke T od njene ortogonalne projekcije na tu ravninu, a računa se prema formuli:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-signD\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.5 Koordinatna metoda

Primijeniti koordinatnu metodu u stereometriji znači dano geometrijsko tijelo smjestiti u pogodan koordinatni sustav i dani problem riješiti primjenom analitičke geometrije. Ilustrirajmo metodu na primjeru zadatka primjenjenog učenicima drugog razreda srednje škole. Zadatak je preuzet iz [5].

Primjer 1.5.1. *Neka su M, N, P, Q redom polovišta bridova $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ tetraedra $ABCD$. Onda je $MNPQ$ paralelogram.*

Bez smanjenja općenitosti smjestimo tetraedar $ABCD$ u koordinatni sustav tako da trokut $\triangle ABC$ leži u $xy-$ravnini. Tada su koordinate njegovih vrhova:

$$A(x_A, y_A, 0), B(x_B, y_B, 0), C(x_C, y_C, 0), D(x_D, y_D, z_D).$$

Koordinate točaka M, N, P i Q odredit ćemo primjenom formula za koordinate djelišne točke, odnosno njenog specijalnog slučaja kad je djelišna točka upravo točka polovište dužine (uz uvjet $\lambda = 1$).

Točka M polovište je brida $\overline{AB}$ pa su njene koordinate:

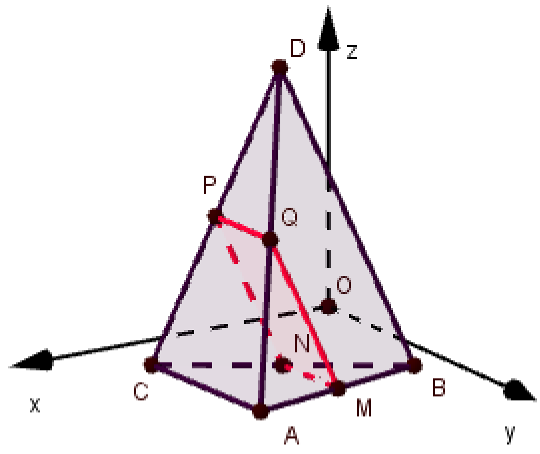
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Točka N polovište je brida $\overline{BC}$ pa su njene koordinate:

$$N\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right).$$

Točka P polovište je brida $\overline{CD}$ pa su njene koordinate:

$$P\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right).$$



Slika 1.6: Tetraedar $ABCD$

Točka Q polovište je brida $\overline{AD}$ pa su njene koordinate:

$$Q\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}, \frac{z_A + z_D}{2}\right).$$

Vektor smjera pravca određenog dvjema točkama $T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2)$ jednak je $\vec{s} = \left\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right\}$. Odredimo vektore smjera pravaca MN, PQ, MQ, NP.

Vektor smjera pravca MN jednak je:

$$\vec{s}_{MN} = \left\{\frac{x_B + x_C - x_A - x_B}{2}, \frac{y_B + y_C - y_A - y_B}{2}, \frac{z_B + z_C - z_A - z_B}{2}\right\},$$

$$\vec{s}_{MN} = \left\{\frac{x_C - x_A}{2}, \frac{y_C - y_A}{2}, \frac{z_C - z_A}{2}\right\}.$$

Analogno odredimo vektore smjera $\vec{s}_{PQ}, \vec{s}_{MQ}$ i $\vec{s}_{NP}$ pravaca PQ, MQ, NP:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_{PQ} &= \left\{\frac{x_A - x_C}{2}, \frac{y_A - y_C}{2}, \frac{z_A - z_Z}{2}\right\}, \\
\vec{s}_{MQ} &= \left\{\frac{x_D - x_B}{2}, \frac{y_D - y_B}{2}, \frac{z_D - z_B}{2}\right\}, \\
\vec{s}_{NP} &= \left\{\frac{x_D - x_B}{2}, \frac{y_D - y_B}{2}, \frac{z_D - z_B}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Vrijedi: $\vec{s}_{MN} = -\vec{s}_{PQ}$ i $\vec{s}_{MQ} = \vec{s}_{NP}$ pa zaključujemo da su vektori $\vec{s}_{MN}$ i $\vec{s}_{PQ}$, odnosno $\vec{s}_{MQ}$ i $\vec{s}_{PN}$ kolinearni, to jest da su pravci MN i PQ, odnosno MQ i PN paralelni. Dakle, $MNPQ$ je paralelogram.

Poglavlje 2

Analogije trokuta i tetraedra

Trokut je poligon s tri vrha. Alternativna definicija trokuta jest da je trokut konkveksna ljuska triju nekolinearnih točaka. Tetraedar ima vrlo slične definicije. **Tetraedar** je poliedar s četiri vrha; ili tetraedar je konveksna ljuska četiriju nekomplanarnih točaka. U ovom ćemo poglavlju razmatrati teoreme za tetraedar koji su analogoni odgovarajućih teorema za trokut.

2.1 Pitagorin poučak

Za pravokutne trokute vrijedi Pitagorin poučak:

Teorem 2.1.1. *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad njegovim katetama.*

Analogija između trokuta i tetraedra omogućava nam razmatranje prostornog analogona Pitagorina poučka za tetraedar. Pokažimo da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.1.2. *Neka je $ABDC$ tetraedar kojemu su bridovi iz vrha D međusobno okomiti. Ako su P_A, P_B, P_C, P_D površine strana tetraedra $ABCD$ nasuprot vrhovima A, B, C, D, onda vrijedi:*

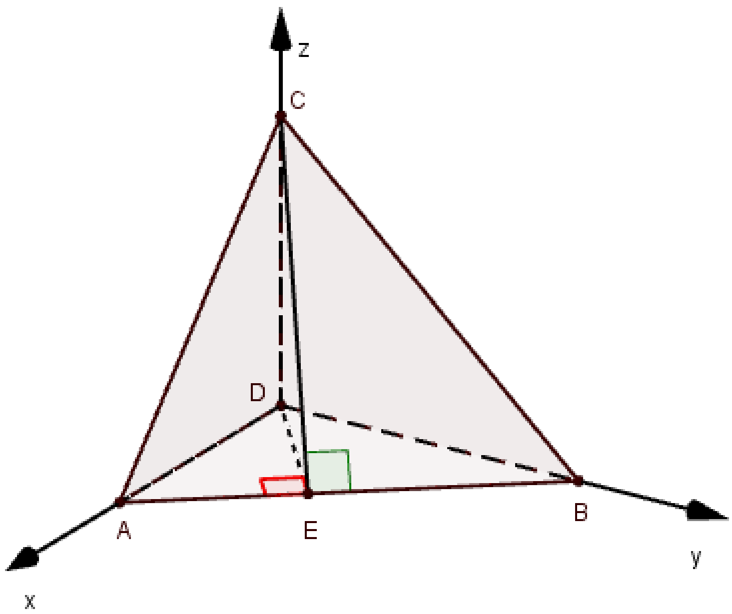
$$P_D{}^2 = P_A{}^2 + P_B{}^2 + P_C{}^2.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti tetraedar $ABCD$ smjestimo u pravokutni koordinatni sustav tako da je točka D u ishodištu koordinatnog sustava, $D(0,0,0)$. Tada su koordinate ostalih vrhova tetraedra: $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$.
Odredimo jednadžbu visine iz vrha D na brid $\overline{AB}$. Označimo nožište te visine s E. U tu svrhu odredimo jednadžbu pravca na kojemu leži brid $\overline{AB}$. Taj pravac prolazi točkama A i B pa je njegova jednadžba u parametarskom obliku:

$$\begin{cases} x = a + \lambda(0 - a) \\ y = 0 + \lambda(b - 0) \\ z = 0 + \lambda(0 - 0), \end{cases}$$

odnosno:

$$\begin{cases} x = a - \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Slika 2.1: Tetraedar $ABCD$

Iz parametarskog oblika jednadžbe pravca iščitavamo vektor smjera, $\vec{s}_{AB} = \{-a, b, 0\}$. Svaka točka E koja pripada visini iz vrha D na brid $\overline{AB}$ oblika je $E(t_x, t_y, 0)$. Iz tog slijedi da je jednadžba visine iz vrha D na brid $\overline{AB}$, određene točkama D i E:

$$\begin{cases} x = 0 - \alpha(t_x - 0) \\ y = 0 + \alpha(t_y - 0) \\ z = 0 + \alpha(0 - 0), \end{cases}$$

odnosno:

$$\begin{cases} x = \alpha t_x \\ y = \alpha t_y \\ z = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vektor smjera visine iz vrha D na brid $\overline{AB}$ je $\vec{s}_{DE} = \{t_x, t_y, 0)\}$.
Kako su pravci AB i DE okomiti, vrijedi da je skalarni umnožak njihovih vektora smjera jednak nuli, odnosno:

$$\begin{aligned} \vec{s}_{AB} \cdot \vec{s}_{DE} &= 0 \\ -at_x + bt_y &= 0 \\ at_x &= bt_y \\ t_y &= \frac{a}{b} t_x. \end{aligned}$$

Točka E pripada bridu $\overline{AB}$ pa mora zadovoljavati jednadžbu pravca AB. Vrijedi:

$$\begin{cases} t_x = a - \lambda a \\ \frac{a}{b} t_x = \lambda b \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Dijeljenjem s $a, b \neq 0$ i eliminacijom parametra λ dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{a - t_x}{a} &= \frac{at_x}{b^2} \\ ab^2 - b^2 t_x &= a^2 t_x \\ t_x(a^2 + b^2) &= ab^2 \\ t_x &= \frac{ab^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je: $t_y = \frac{a}{b} t_x = \frac{a}{b} \cdot \frac{ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$.
Visina iz vrha D na brid $\overline{AB}$ ima jednadžbu:

$$\begin{cases} x = \alpha \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \\ y = \alpha \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \\ z = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odredimo koordinate točke E. Točka E je presjek pravaca AB i DE. Izjednačavanjem koordinata dobivamo:

$$\begin{cases} a - \lambda a = \alpha \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \\ \lambda b = \alpha \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Dijeljenjem druge jednadžbe s $b \neq 0$ dobivamo: $\lambda = \alpha \dfrac{a^2 b}{b(a^2+b^2)}$. Dobiveni λ uvrštavamo u prvu jednadžbu:

$$\begin{aligned} a - \alpha \frac{a^2 b}{b(a^2+b^2)} \cdot a &= \alpha \frac{ab^2}{a^2+b^2} \\ a(a^2+b^2) - a^3\alpha &= \alpha a b^3 \\ \alpha(ab^2 + a^3) &= a(a^2+b^2) \\ \alpha &= \frac{a(a^2+b^2)}{a(b^2+a^2)} \\ \alpha &= 1. \end{aligned}$$

Dakle, točka E ima koordinate $E\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2}, 0\right)$.

Trokut $\triangle CDE$ je pravokutan s pravim kutom pri vrhu D. Na taj trokut možemo primijeniti Pitagorin poučak:

$$|CE|^2 = |DE|^2 + |DC|^2,$$

odnosno:

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right)^2 + c^2.$$

Pomnožimo li cijelu jednadžbu s $a^2 + b^2 \neq 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 4{P_D}^2 &= (a^2+b^2) \cdot \left[\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right)^2 + c^2\right] \\ 4{P_D}^2 &= \frac{a^2 b^4}{a^2+b^2} + \frac{a^4 b^2}{a^2+b^2} + c^2(a^2+b^2) \\ 4{P_D}^2 &= \frac{a^2 b^2 (a^2+b^2)}{a^2+b^2} + c^2 a^2 + c^2 b^2 \\ 4{P_D}^2 &= a^2 b^2 + c^2 b^2 \\ 4{P_D}^2 &= 4{P_A}^2 + 4{P_B}^2 + 4{P_C}^2. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da za tetraedar $ABCD$ kojemu su vrhovi iz brida D međusobno okomiti vrijedi:

$$P_D{}^2 = P_A{}^2 + P_B{}^2 + P_C{}^2.$$

□

2.2 Težište

U poglavlju 1.3 definirali smo težište trokuta i kroz primjer 1.3.1 dokazali sljedeći teorem:

Teorem 2.2.1. *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki - **težištu** trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru* $2:1$*, mjereći od vrha trokuta.*

Pokažimo da za tetraedar vrijedi analogna tvrdnja:

Teorem 2.2.2. *Težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki - **težištu** tetraedra. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru* $3:1$*, mjereći od vrha tetraedra.*

Dokaz. U pravokutni koordinatni sustav ucrtajmo tetraedar $ABCD$. Neka su koordinate vrhova tetraedra: $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$.
Neka su T_A, T_B, T_C, T_D težišta strana tetraedra nasuprot vrhovima A, B, C, D redom. U primjeru 1.3.1. izveli smo formule za koordinate težišta trokuta u prostoru. Odredimo koordinate težišta T_A, T_B, T_C, T_D.
T_A je težište trokuta $\triangle BCD$ pa su njegove koordinate:

$$T_A\left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, \frac{y_B + y_C + y_D}{3}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3}\right).$$

T_B je težište trokuta $\triangle ACD$ pa su njegove koordinate:

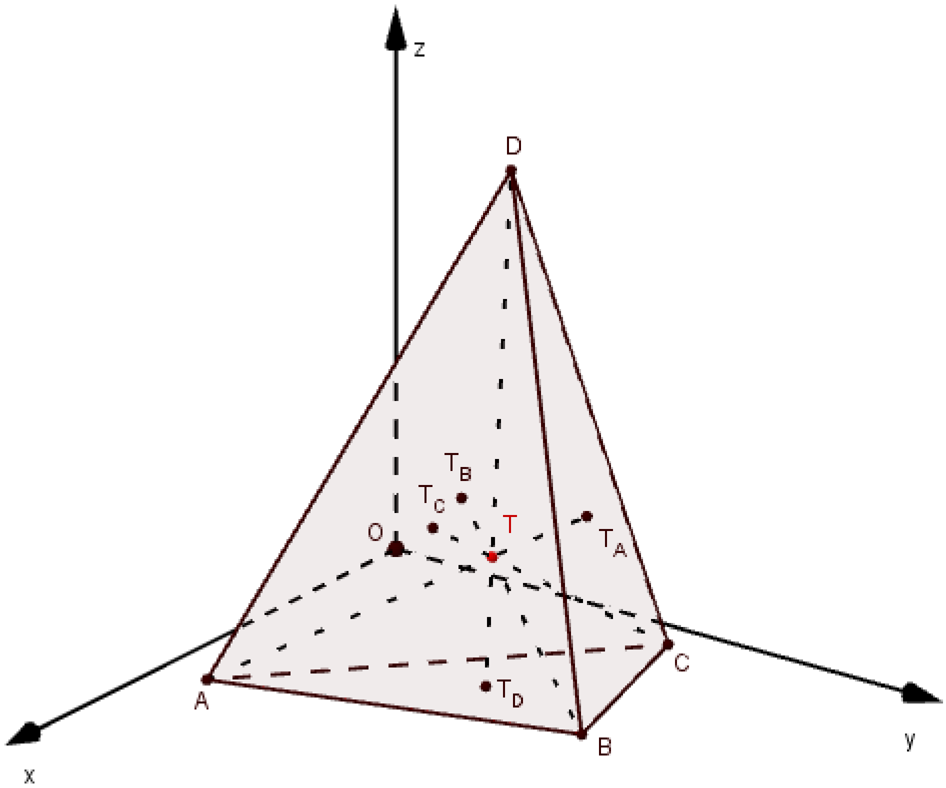
$$T_B\left(\frac{x_A + x_C + x_D}{3}, \frac{y_A + y_C + y_D}{3}, \frac{z_A + z_C + z_D}{3}\right).$$

T_C je težište trokuta $\triangle ABD$ pa su njegove koordinate:

$$T_C\left(\frac{x_A + x_B + x_D}{3}, \frac{y_A + y_B + y_D}{3}, \frac{z_A + z_B + z_D}{3}\right).$$

T_D je težište trokuta $\triangle ABC$ pa su njegove koordinate:

$$T_D\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



Slika 2.2: Tetraedar $ABCD$, težišnice i težište

Na težišnici $\overline{AT_A}$ odaberimo točku T_1 takvu da je $|AT_1| = \dfrac{3}{4}|AT_A|$. Prema formulama za koordinate djelišne točke uz uvjet $\lambda = 3$ imamo:

$$x_{T_1} = \frac{x_A + 3 \cdot \frac{x_B+x_C+x_D}{3}}{3+1} = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4},$$

$$y_{T_1} = \frac{y_A + 3 \cdot \frac{y_B+y_C+y_D}{3}}{3+1} = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4},$$

,

$$z_{T_1} = \frac{z_A + 3 \cdot \frac{z_B+z_C+z_D}{3}}{3+1} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4},$$

odnosno koordinate točke T_1 su: $T_1\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$.

Na težišnici $\overline{BT_B}$ odaberimo točku T_2 takvu da je $|BT_2| = \frac{3}{4}|BT_B|$, na težišnici $\overline{CT_C}$ točku T_3 takvu da je $|CT_3| = \frac{3}{4}|CT_C|$, a na težišnici $\overline{DT_D}$ točku T_4 takvu da je $|DT_4| = \frac{3}{4}|DT_D|$. Analogno kao i pri određivanju koordinata točke T_1, koristimo formule za koordinate djelišne točke uz uvjet $\lambda = 3$. Dobivamo:

$$T_2\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right),$$

$$T_3\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right),$$

$$T_4\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

Sve se četiri točke T_1, T_2, T_3, T_4 podudaraju u koordinatama što znači da se radi o jednoj točki koja pripada svim četirima težišnicama $\overline{AT_A}, \overline{BT_B}, \overline{CT_C}, \overline{DT_D}$ tetraedra $ABCD$. Time smo pokazali da se sve četiri težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki koja svaku od težišnica dijeli u omjeru 3 : 1 mjereći od vrha tetraedra. □

2.3 Središte opisane sfere

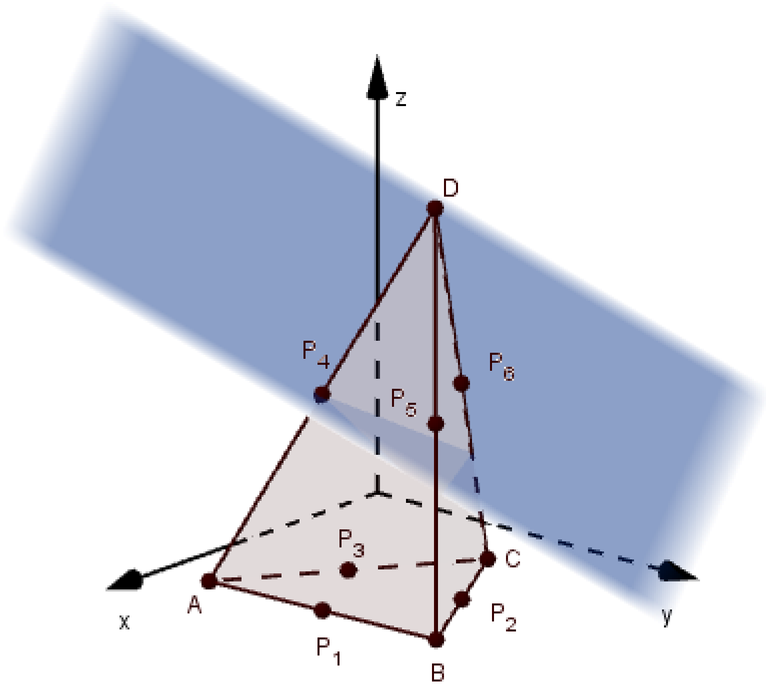
Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.
Za trokute vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.3.1. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta je točka* ***središte opisane kružnice trokuta****.*

Pokazat ćemo da za tetraedar vrijedi analogna tvrdnja, a u tu svrhu definirajmo simetralnu ravninu dužine.
Simetralna ravnina dužine je skup svih točaka jednako udaljenih od krajnjih točaka te dužine. Simetralna ravnina dužine prolazi njenim polovištem i okomita je na nju.

Teorem 2.3.2. *Simetralne ravnine bridova tetraedra sijeku se u jednoj točki. Ta je točka* ***središte tetraedru opisane sfere****.*

Dokaz. Neka je dan tetraedar $ABCD$. Bez smanjenja općenitosti smjestimo tetraedar $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav tako da trokut $\triangle ABC$ leži u $xy-$ravnini. Koordinate vrhova tetraedra su: $A(x_A, y_A, 0), B(x_B, y_B, 0), C(x_C, y_C, 0), D(x_D, y_D, z_D)$.
Simetralne ravnine bridova $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$ okomite su na $xy-$ravninu. Pokažimo da je presjek ovih triju ravnina pravac sa slobodnom z koordinatom.



Slika 2.3: Tetraedar $ABCD$ i simetralna ravnina brida $\overline{AD}$

Neka je π_{AB} simetralna ravnina brida $\overline{AB}$. π_{AB} prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$. Koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$ računamo korištenjem formula za koordinate djelišne točke uz uvjet $\lambda = 1$ i one su: $P_1\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, 0\right)$. Vektor normale ravnine π_{AB} jednak je vektoru smjera pravca AB pa je $\vec{n}_1 = \{x_B - x_A, y_B - y_A, 0\}$.
Jednadžba ravnine π_{AB} je:

$$(x_B - x_A)\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right) + (y_B - y_A)\left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right) = 0,$$

odnosno:

$$(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + \frac{{x_A}^2 - {x_B}^2}{2} + \frac{{y_A}^2 - {y_B}^2}{2} = 0.$$

Analogno odredimo jednadžbe simetralnih ravnina π_{BC} i π_{AC} bridova $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Ravnina π_{BC} prolazi točkom $P_2\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, 0\right)$, a vektor normale joj je: $\vec{n}_2 = \{x_c - x_B, y_C - y_B, 0\}$.
Jednadžba ravnine π_{BC} je:

$$(x_C - x_B)x + (y_C - y_B)y + \frac{{x_B}^2 - {x_C}^2}{2} + \frac{{y_B}^2 - {y_C}^2}{2} = 0.$$

Ravnina π_{AC} prolazi točkom $P_3\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, 0\right)$, a vektor normale joj je: $\vec{n}_3 = \{x_c - x_A, y_C - y_A, 0\}$. Jednadžba ravnine π_{AC} je:

$$(x_C - x_A)x + (y_C - y_A)y + \frac{{x_A}^2 - {x_C}^2}{2} + \frac{{y_A}^2 - {y_C}^2}{2} = 0.$$

Presjek ravnina π_{AB} i π_{BC} je pravac p čija je ortogonalna projekcija na $xy-$ ravninu (ravninu trokuta $\triangle ABC$) točka $O(x_0, y_0, 0)$. Točka O središte je trokutu $\triangle ABC$ opisane kružnice. Iz geometrije ravnine znamo da ako se dvije simetrale stranica trokuta sijeku u nekoj točki, tada i treća simetrala prolazi tom točkom. Analogan zaključak izvodimo i ovdje. Točke pravca p oblika su (x_0, y_0, z) gdje je z realan broj. Pravac p, presjek ravnina π_{AB} i π_{BC}, nalazi se i u ravnini π_{AC}, odnosno pravac p zadovoljava jednadžbe svih triju simetralnih ravnina π_{AB}, π_{BC} i π_{AC}. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
(x_B - x_A)x_0 + (y_B - y_A)y_0 + \frac{{x_A}^2 - {x_B}^2}{2} + \frac{{y_A}^2 - {y_B}^2}{2} &= 0,\\
(x_C - x_B)x_0 + (y_C - y_B)y_0 + \frac{{x_B}^2 - {x_C}^2}{2} + \frac{{y_B}^2 - {y_C}^2}{2} &= 0,\\
(x_C - x_A)x_0 + (y_C - y_A)y_0 + \frac{{x_A}^2 - {x_C}^2}{2} + \frac{{y_A}^2 - {y_C}^2}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Odredimo jednadžbe simetralnih ravnina bridova iz vrha D.
Simetralna ravnina π_{AD}, brida $\overline{AD}$, prolazi polovištem $P_4\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}, \frac{z_D}{2}\right)$, a vektor normale joj je $\vec{n}_4 = \{x_D - x_A, y_D - y_A, z_D\}$. Njena je jednadžba:

$$(x_D - x_A)\left(x - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + (y_D - y_A)\left(y - \frac{y_A + y_D}{2}\right) + z_D\left(z - \frac{z_D}{2}\right) = 0.$$

Odredimo sada presjek ravnine π_{AD} i pravca p. Uvrštavanjem (x_0, y_0, z) u u jednadžbu ravnine π_{AD} dobivamo:

$$(x_D - x_A)\left(x_0 - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + (y_D - y_A)\left(y_0 - \frac{y_A + y_D}{2}\right) + z_D\left(z - \frac{z_D}{2}\right) = 0$$

$$z_D\left(z - \frac{z_D}{2}\right) = (x_A - x_D)\left(x_0 - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + (y_A - y_D)\left(y_0 - \frac{y_A + y_D}{2}\right)$$

$$z \cdot z_D = (x_A - x_D)\left(x_0 - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + (y_A - y_D)\left(y_0 - \frac{y_A + y_D}{2}\right) + \frac{{z_D}^2}{2}.$$

Dijeljenjem jednadžbe sa $z_D \neq 0$ dobivamo z koordinatu sjecišta pravca p i ravnine π_{AD} koju ćemo imenovati sa z_1:

$$z_1 = \frac{x_A - x_D}{z_D}\left(x_0 - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + \frac{y_A - y_D}{z_D}\left(y_0 - \frac{y_A + y_D}{2}\right) + \frac{z_D}{2}.$$

Dakle, sjecište pravca p i ravnine π_{AD} je točka $S(x_0, y_0, z_1)$. Preostaje provjeriti pripada li točka S simetralnim ravninama π_{BD} i π_{CD} bridova $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$.
Analogno kao i u računu jednadžbi simetralnih ravnina koje smo odredili ranije u ovom dokazu, odredimo polovišta bridova $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$ i vektore smjera pravaca BD i CD koji su vektori normala pripadnih simetralnih ravnina.
Simetralna ravnina π_{BD} ima jednadžbu:

$$(x_D - x_B)\left(x - \frac{x_B + x_D}{2}\right) + (y_D - y_B)\left(y - \frac{y_B + y_D}{2}\right) + z_D\left(z - \frac{z_D}{2}\right) = 0.$$

Uvrstimo koordinate točke S u jednadžbu ravnine π_{BD}:

$$(x_D - x_B)\left(x_0 - \frac{x_B + x_D}{2}\right) + (y_D - y_B)\left(y_0 - \frac{y_B + y_D}{2}\right) +$$

$$z_D\left(\frac{x_A - x_D}{z_D}\left(x_0 - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + \frac{y_A - y_D}{z_D}\left(y_0 - \frac{y_A + y_D}{2}\right) + \frac{z_D}{2} - \frac{z_D}{2}\right) = 0$$

$$(x_D - x_B)\left(x_0 - \frac{x_B + x_D}{2}\right) + (y_D - y_B)\left(y_0 - \frac{y_B + y_D}{2}\right) +$$

$$(x_A - x_D)\left(x_0 - \frac{x_A + x_D}{2}\right) + (y_A - y_D)\left(y_0 - \frac{y_A + y_D}{2}\right) = 0$$

$$(x_D - x_B)x_0 + \frac{{x_B}^2 - {x_D}^2}{2} + (y_D - y_B)y_0 + \frac{{y_B}^2 - {y_D}^2}{2} + (x_A - x_D)x_0 +$$

$$\frac{{x_D}^2 - {x_A}^2}{2} + (y_A - y_D)y_0 + \frac{{y_D}^2 - {y_A}^2}{2} = 0$$

$$x_D x_0 - x_B x_0 + \frac{{x_B}^2}{2} - \frac{{x_D}^2}{2} + y_D y_0 - y_B y_0 + \frac{{y_B}^2}{2} - \frac{{y_D}^2}{2} + x_A x_0 - x_D x_0 +$$

$$\frac{{x_D}^2}{2} - \frac{{x_A}^2}{2} + y_A y_0 - y_D y_0 + \frac{{y_D}^2}{2} - \frac{{y_A}^2}{2} = 0$$

$$(x_A - x_B)x_0 + (y_A - y_B)y_0 + \frac{{x_B}^2 - {x_A}^2}{2} + \frac{{y_B}^2 - {y_A}^2}{2} = 0.$$

Pomnožimo li posljednju jednadžbu s -1 dobivamo:

$$(x_B - x_A)x_0 + (y_B - y_A)y_0 + \frac{{x_A}^2 - {x_B}^2}{2} + \frac{{y_A}^2 - {y_B}^2}{2} = 0,$$

za što znamo da sigurno vrijedi jer je ovo analitički zapis istinite činjenice da pravac p leži u simetralnoj ravnini π_{AB} brida $\overline{AB}$.
Dakle, točka S pripada simetralnoj ravnini π_{BD}.
Analogno se uvrštavanjem koordinata točake S u jednadžbu simetralne ravnine π_{CD} brida $\overline{CD}$ dobije:

$$(x_C - x_A)x_0 + (y_C - y_A)y_0 + \frac{{x_A}^2 - {x_C}^2}{2} + \frac{{y_A}^2 - {y_C}^2}{2} = 0.$$

Dobivena jednakost vrijedi jer pravac p leži u simetralnoj ravnini π_{AC} brida $\overline{AC}$ iz čega zaključujemo da točka S pripada simetralnoj ravnini π_{AC}.
Pokazali smo da točka $S(x_0, y_0, z_1)$ pripada simetralnim ravninama svih bridova tetraedra $ABCD$, odnosno da se sve simetralne ravnine bridova tetraedra sijeku u jednoj točki.

□

2.4 Visine tetraedra

Visina trokuta je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi kraj nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojem leži nasuprotna stranica.
Za trokut vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.4.1. *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo* ***ortocentar*** *trokuta.*

Visina tetraedra je dužina kojoj je jedan kraj vrh tetraedra, a drugi kraj nožište okomice spuštene iz tog vrha na ravninu u kojoj leži nasuprotna strana tetraedra. Ako zaključivanje po analogiji nastavimo kao u prethodnim primjerima, onda analogna tvrdnja za tetraedar glasi: *Pravci na kojima leže visine tetraedra sijeku se u jednoj točki.* No, navedena tvrdnja nije općenito istinita jer su odnosi među visinama tetraedra složeniji. U ovom ćemo radu dokazati jedan od teorema o visinama tetraedra.

Teorem 2.4.2. *Ako se u jednoj točki sijeku pravci na kojima leže tri visine tetraedra, onda tom točkom prolazi i pravac na kojemu leži četvrta visina tetraedra.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, smjestimo tetraedar $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav tako da trokut $\triangle ABC$ leži u $xy-$ ravnini. Onda su koordinate vrhova tetraedra: $A(x_A, y_A, 0), B(x_B, y_B, 0), C(x_C, y_C, 0), D(x_D, y_D, z_D)$.
Odredimo jednadžbe visina tetraedra $ABCD$.
Pravac na kojemu leži visina v_A prolazi vrhom A, a vektor smjera mu je jednak vektoru normale ravnine π_{BCD} određene vrhovima B, C, D. Odredimo jednadžbu ravnine π_{BCD}:

$$\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B & z - z_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B & z_C - z_B \\ x_D - x_B & y_C - y_B & z_C - z_B \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_B)(y_C - y_B)z_D - (y - y_B)(x_C - x_B)z_D + z[(x_C - x_B)(y_D - y_B) - (x_D - x_B)(y_C - y_B)] = 0$$

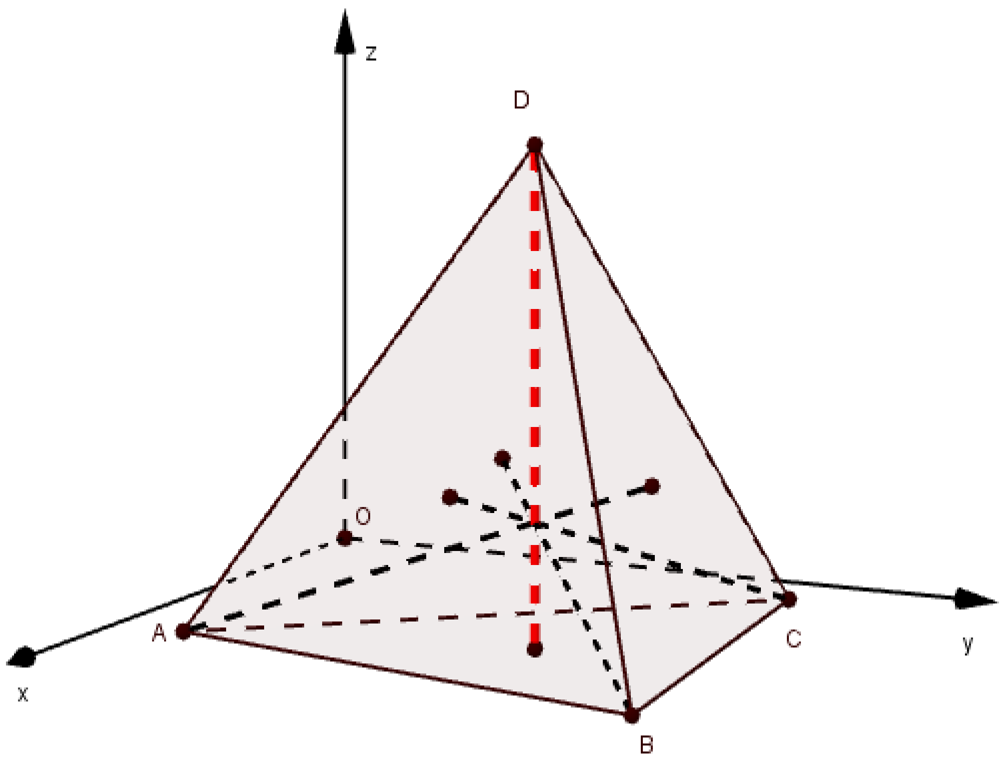
$$xz_D(y_C - y_B) - yz_D(x_C - x_B) + z[(x_C - x_B)(y_D - y_B) - (x_D - x_B)(y_C - y_B)] - x_B z_D(y_C - y_B) + \\ + y_B z_D(x_C - x_B) = 0.$$

Iz dobivenog zaključujemo da je vektor normale ravnine π_{BCD}, odnosno vektor smjera pravca na kojemu leži visina v_A jednak:

$$\vec{s}_A = \{z_D(y_C - y_B), z_D(x_B - x_C), (x_C - x_B)(y_D - y_B) - (x_D - x_B)(y_C - y_B)\},$$

pa je jednadžba pravca na kojemu leži visina v_A:

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha z_D(y_C - y_B) \\ y = y_A + \alpha z_D(x_B - x_C) \\ z = \alpha[(x_C - x_B)(y_D - y_B) - (x_D - x_B)(y_C - y_B)], \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$



Slika 2.4: Tetraedar $ABCD$ i njegove visine

Odredimo jednadžbe pravaca na kojima leže visine v_B, v_C, v_D iz vrhova B, C, D.
Pravci na kojema leže visine v_B, v_C prolaze vrhovima B, C redom. Vektor smjera pravca na kojemu leži visina v_B jednak je vektoru normale ravnine π_{ACD} određene vrhovima A, C, D, a vektor smjera pravca na kojemu leži visina v_C jednak je vektoru normalen ravnine π_{ABD} određene vrhovima A, B, D. Analognim računom dobivamo da je jednadžba pravca na kojemu leži visina iz vrha B jednaka:

$$\begin{cases} x = x_B + \beta z_D(y_C - y_A) \\ y = y_B + \beta z_D(x_A - x_C) \\ z = \beta((x_C - x_A)(y_D - y_A) - (x_D - x_A)(y_C - y_A)), \quad \beta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

a jednadžba pravca na kojemu leži visina iz vrha C jednaka je:

$$\begin{cases} x = x_C + \gamma z_D(y_B - y_A) \\ y = y_C + \gamma z_D(x_A - x_B) \\ z = \gamma[(x_B - x_A)(y_D - y_A) - (x_D - x_A)(y_B - y_A)], \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Kako trokut $\triangle ABC$ pripada $xy-$ravnini, sve točke koje pripadaju pravcu na kojemu leži visina iz vrha D imaju apscise i ordinate upravo jednake: $x = x_D, y = y_D$. Jednadžba tog pravca jednaka je:

$$\begin{cases} x = x_D \\ y = y_D \\ z = \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Prema pretpostavci teorema, visine v_A, v_B, v_C sijeku se u jednoj točki $H(x_0, y_0, z_0)$. Pokažimo da točka H pripada i visini v_D, odnosno pravcu na kojemu ta visina leži.
Točka H pripada pravcu na kojemu leži visina iz vrha A pa vrijedi:

$$\begin{cases} x_0 = x_A + \alpha z_D(y_C - y_B) \\ y_0 = y_A + \alpha z_D(x_B - x_C) \\ z_0 = \alpha(x_C - x_B)(y_D - y_B) - \alpha(x_D - x_B)(y_C - y_B), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Izrazimo li iz prve i druge jednadžbe parametar α dobivamo:

$$\alpha = \frac{x_0 - x_A}{z_D(y_c - y_B)} = \frac{y_0 - y_A}{z_D(x_B - x_C)}. \tag{2.5}$$

Dobivene izraze za α uvrstimo u treću jednadžbu:

$$z_0 = \frac{y_0 - y_A}{z_D(x_B - x_C)}(x_C - x_B)(y_D - y_B) - \frac{x_0 - x_A}{z_D(y_c - y_B)}(x_D - x_B)(y_C - y_B)$$

$$z_0 = \frac{1}{z_D}[-(y_0 - y_A)(y_D - y_B) - (x_0 - x_A)(x_D - x_B)]. \tag{2.6}$$

Analogno, točka H pripada pravcu na kojemu leži visina iz vrha B pa vrijedi:

$$\begin{cases} x_0 = x_B + \beta z_D(y_C - y_A) \\ y_0 = y_B + \beta z_D(x_A - x_C) \\ z_0 = \beta[(x_C - x_A)(y_D - y_A) - (x_D - x_A)(y_C - y_A)], \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Izrazimo li iz prve i druge jednadžbe β imamo:

$$\beta = \frac{x_0 - x_B}{z_D(y_C - y_A)} = \frac{y_0 - y_B}{z_D(x_A - x_C)},$$

što uvrštavanjem u treću jednadžbu daje:

$$z_0 = \frac{1}{z_D}[-(y_0 - y_B)(y_D - y_A) - (x_0 - x_B)(x_D - x_A)]. \tag{2.7}$$

Točka H pripada pravcu na kojemu leži visina iz vrha C pa vrijedi:

$$\begin{cases} x_0 = x_C + \gamma z_D(y_B - y_A) \\ y_0 = y_C + \gamma z_D(x_A - x_B) \\ z_0 = \gamma[(x_B - x_A)(y_D - y_A) - (x_D - x_A)(y_B - y_A)], \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Iz prve i druge jednadžbe izrazimo γ:

$$\gamma = \frac{x_0 - x_c}{z_D(y_B - y_A)} = \frac{y_0 - y_C}{z_D(x_A - x_B)}.$$

Dobivene izraze uvrstimo u treću jednadžbu i dobivamo:

$$z_0 = \frac{1}{z_D}[-(y_0 - y_C)(y_D - y_A) - (x_0 - x_C)(x_D - x_A)]. \tag{2.8}$$

Iz činjenice da točka H pripada presjeku pravaca na kojima leže visine iz vrhova A i B slijedi da je desna strana u 2.6 jednaka desnoj strani u 2.7 pa izjednačavanjem ovih dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{1}{z_D}[-(y_0 - y_A)(y_D - y_B) - (x_0 - x_A)(x_D - x_B)] = \frac{1}{z_D}[-(y_0 - y_B)(y_D - y_A) - (x_0 - x_B)(x_D - x_A)]$$

$$(y_0 - y_A)(y_D - y_B) + (x_0 - x_A)(x_D - x_B) = (y_0 - y_B)(y_D - y_A) + (x_0 - x_B)(x_D - x_A),$$

što transformiranjem daje:

$$\begin{aligned} y_0y_D - y_0y_B - y_Ay_D + y_Ay_B + x_0x_D - x_0x_B - x_Ax_D + x_Ax_B &= \\ = y_0y_D - y_0y_A - y_By_D + y_Ay_B + x_0x_D - x_0x_A - x_Bx_D + x_Ax_Ax_B & \end{aligned}$$

$$x_0(x_A - x_B) - x_D(x_A - x_B) = y_0(y_B - y_A) - y_D(y_B - y_A)$$

$$(x_0 - x_D)(x_A - x_B) = (y_0 - y_D)(y_B - y_A), \tag{2.9}$$

odnosno:

$$y_0 = \frac{(x_0 - x_D)(x_A - x_B)}{y_B - y_A} + y_D. \tag{2.10}$$

Isto tako, točka H pripada presjeku pravaca na kojima leže visine iz vrhova B i C pa slijedi da je desna strana u 2.7 jednaka desnoj strani u 2.8. Izjednačavanjem ovih dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{1}{z_D}(-(y_0 - y_B)(y_D - y_A) - (x_0 - x_B)(x_D - x_A)) = \frac{1}{z_D}(-(y_0 - y_C)(y_D - y_A) - (x_0 - x_C)(x_D - x_A)),$$

što se kraćim transformiranjem svodi na oblik:

$$(y_D - y_A)(y_B - y_C) = (x_B - x_C)(x_A - x_D). \tag{2.11}$$

Iz izraza 2.5 za α imamo da je:

$$\frac{x_0 - x_A}{z_D(y_c - y_B)} = \frac{y_0 - y_A}{z_D(x_B - x_C)},$$

što se svede na:

$$(x_0 - x_A)(x_B - x_C) = (y_0 - y_A)(y_C - y_B). \tag{2.12}$$

Oduzimanjem 2.12 od 2.11 dobivamo:

$$(y_D - y_A)(y_B - y_C) - (x_0 - x_A)(x_B - x_C) = (x_B - x_C)(x_A - x_D) - (y_0 - y_A)(y_C - y_B),$$

iz čega primjenom kraćih transformacija slijedi:

$$\begin{aligned}
y_D y_B - y_D y_C - y_A y_B + y_A y_C - x_0 x_B + x_0 x_C + x_A x_B - x_A x_C &= \\
= x_B x_A - x_B x_D - x_C x_A + x_C x_D - y_0 y_C + y_0 y_B + y_A y_C - y_A y_B & \\
x_0(x_C - x_B) + y_D(y_B - y_C) &= x_D(x_C - x_B) + y_0(y_B - y_C) \\
(y_0 - y_D)(y_C - y_B) &= (x_B - x_C)(x_0 - x_D) \\
y_0 &= \frac{(x_B - x_C)(x_0 - x_D)}{y_C - y_B} + y_D. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Sada izjednačavanjem 2.10 i 2.13 dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
\frac{(x_0 - x_D)(x_A - x_B)}{y_B - y_A} + y_D &= \frac{(x_B - x_C)(x_0 - x_D)}{y_C - y_B} + y_D \\
(x_0 - x_D)\left(\frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} - \frac{x_B - x_C}{y_C - y_B}\right) &= 0 \\
(x_0 - x_D)\frac{(x_A - x_B)(y_C - y_B) - (x_B - x_C)(y_B - y_A)}{(y_B - y_A)(y_C - y_B)} &= 0 \\
(x_0 - x_D)[x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)] &= 0.
\end{aligned}$$

U drugom faktoru dobivenog izraza prepoznajemo formulu za dvostruku površinu trokuta $\triangle ABC$. Budući da su točke A, B, C nekolinearne slijedi da je $P_{ABC} \neq 0$. To znači da prvi faktor dobivenog izraza mora biti jednak nuli, odnosno da vrijedi: $x_0 = x_D$.
Na sličan se način pokaže da je $y_0 = y_D$, što znači da su koordinate točke H jednake $H(x_D, y_D, z_0)$ iz čega slijedi da točka H pripada pravcu na kojemu leži visina iz vrha D što smo i trebali pokazati. □

Tetraedar koji ima svojstvo da se pravci na kojima leže njegove visine sijeku u jednoj točki naziva se **ortocentrični tetraedar**. Točka u kojoj se sijeku njegove visine zove se **ortocentar tetraedra**. Primjer takvog tetraedra je pravilna trostrana piramida. Za visine tetraedra vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.4.3. *Visine tetraedra sijeku se u jednoj točki ako i samo ako su nasuprotni bridovi tetraedra međusobno okomiti.*

Ovaj će nam teorem pomoći da dokažemo sljedeći primjer preuzet iz izvora [9]:

Primjer 2.4.4. *Vrhovi tetraedra su:* $A(-2, -3, 0), B(4, -3, 0), C(4, 9, 1), D(0, 0, 4)$. *Pokažite da tetraedar nije ortocentričan.*

Rješenje primjera: Odredimo vektore smjera pravaca na kojima leže nasuprotne bridovi $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ tetraedra $ABCD$.
Vektor smjera pravca na kojemu leži brid $\overline{AB}$ je:

$$\vec{s}_{AB} = \{4 - (-2), -3 - (-3), 0 - 0\} = \{6, 0, 0\},$$

a vektor smjera pravca na kojemu leži brid $\overline{CD}$ je:

$$\vec{s}_{CD} = \{0 - 2, 0 - 2, 4 - 0\} = \{-2, -2, 4\}.$$

Odredimo skalarni produkt vektora $\vec{s}_{AB}$ i $\vec{s}_{CD}$:

$$\vec{s}_{AB} \cdot \vec{s}_{CD} = 6 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = -12.$$

Kako su pravci okomiti ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak nuli, zaključujemo da pravci na kojima leže bridovi $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ nisu okomiti pa tetraedar nije ortocentrični.

Poglavlje 3

Svojstva tetraedara

U ovom ćemo poglavlju primjenom koordinatne metode dokazati nekoliko poučaka o tetraedru. U literaturi iz koje su preuzeti dokazi su provedeni sintetičkom, a u ovom radu koordinatnom metodom.

3.1 Težište i težišnice tetraedra

U ovom ćemo potpoglavlju dokazati tri teorema vezanih uz težište i težišnice tetraedra. Prvi je teorem preuzet iz izvora [11], a preostala dva iz [9].

Teorem 3.1.1. *U tetraedru je suma kvadrata duljina težišnica jednaka* $\frac{4}{9}$ *sume kvadrata duljina bridova.*

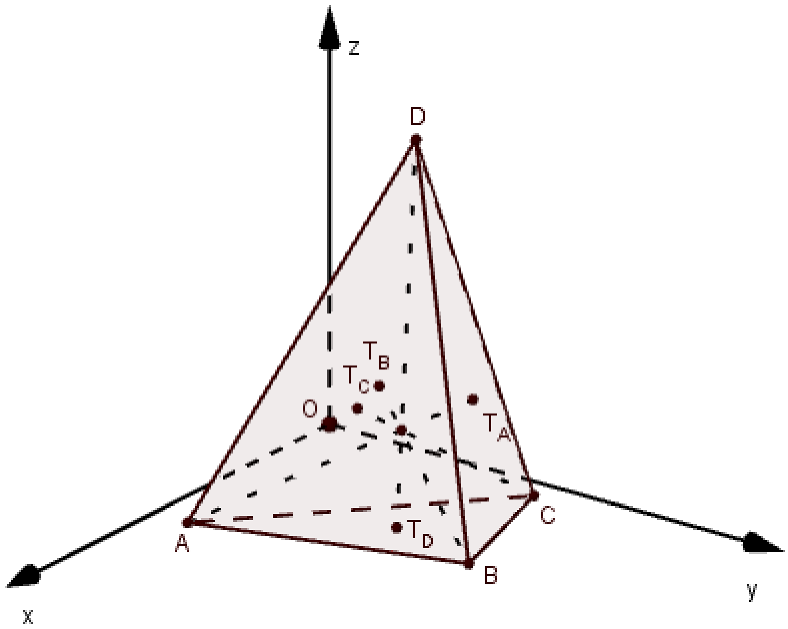
Dokaz. Neka je u pravokutnom koordinantom sustavu dan tetraedar $ABCD$. Neka su koordinate vrhova tetraedra $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$. Označimo s T_A, T_B, T_C, T_D težišta strana tetraedra nasuprot vrhovima A, B, C, D redom.
Na isti način kao u primjeru 1.3.1 odredimo njihove koordinate. Imamo:

$$T_A\left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, \frac{y_B + y_C + y_D}{3}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3}\right),$$

$$T_B\left(\frac{x_A + x_C + x_D}{3}, \frac{y_A + y_C + y_D}{3}, \frac{z_A + z_C + z_D}{3}\right),$$

$$T_C\left(\frac{x_A + x_B + x_D}{3}, \frac{y_A + y_B + y_D}{3}, \frac{z_A + z_B + z_D}{3}\right),$$

$$T_D\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



Slika 3.1: Tetraedar $ABCD$ i težišnice

Primjenom formule za udaljenost dvaju točaka u prostoru, odredimo kvadrate duljina težišnica tetraedra $ABCD$:

$$\begin{aligned}
|AT_A|^2 &= \left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3} - x_A\right)^2 + \left(\frac{y_B + y_C + y_D}{3} - y_A\right)^2 + \left(\frac{z_B + z_C + z_D}{3} - z_A\right)^2 \\
&= \frac{(x_B + x_C + x_D - 3x_A)^2}{9} + \frac{(y_B + y_C + y_D - 3y_A)^2}{9} + \frac{(z_B + z_C + z_D - 3z_A)^2}{9},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|BT_B|^2 &= \left(\frac{x_A + x_C + x_D}{3} - x_B\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_C + y_D}{3} - y_B\right)^2 + \left(\frac{z_A + z_C + z_D}{3} - z_B\right)^2 \\
&= \frac{(x_A + x_C + x_D - 3x_B)^2}{9} + \frac{(y_A + y_C + y_D - 3y_B)^2}{9} + \frac{(z_A + z_C + z_D - 3z_B)^2}{9},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|CT_C|^2 &= \left(\frac{x_A + x_B + x_D}{3} - x_C\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B + y_D}{3} - y_C\right)^2 + \left(\frac{z_A + z_B + z_D}{3} - z_C\right)^2 \\
&= \frac{(x_A + x_B + x_D - 3x_C)^2}{9} + \frac{(y_A + y_B + y_D - 3y_C)^2}{9} + \frac{(z_A + z_B + z_D - 3z_C)^2}{9},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|DT_D|^2 &= \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} - x_D\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3} - y_D\right)^2 + \left(\frac{z_A + z_B + z_C}{3} - z_D\right)^2 \\ &= \frac{(x_A + x_B + x_C - 3x_D)^2}{9} + \frac{(y_A + y_B + y_C - 3y_D)^2}{9} + \frac{(z_A + z_B + z_C - 3z_D)^2}{9}.\end{aligned}$$

Sa S_1 označimo sumu kvadrata duljina težišnica tetraedra $ABCD$. Odredimo S_1:

$$\begin{aligned}S_1 &= |AT_A|^2 + |BT_B|^2 + |CT_C|^2 + |DT_D|^2 \\ &= \frac{1}{9}[x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) - 6(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D) + 9x_A^2 + ...] \\ &\quad + \frac{1}{9}[x_A^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_C + x_Ax_D + x_Cx_D) - 6(x_Bx_A + x_Bx_C + x_Bx_D) + 9x_B^2 + ...] \\ &\quad + \frac{1}{9}[x_A^2 + x_B^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_B + x_Ax_D + x_Bx_D) - 6(x_Cx_A + x_Cx_B + x_Cx_D) + 9x_C^2 + ...] \\ &\quad + \frac{1}{9}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + 2(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Bx_C) - 6(x_Dx_A + x_Dx_B + x_Dx_C) + 9x_D^2 + ...] \\ &= \frac{1}{9}[12x_A^2 + 12x_B^2 + 12x_C^2 + 12x_D^2 - 8(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + ...] \\ &= \frac{4}{3}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2) - \frac{8}{9}(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + ...\end{aligned}$$

U prethodnom zapisu tri točke pišemo radi preglednosti, a označavaju da se algebarski izrazi nastavljaju analogonima napisanih izraza za y i z koordinate.
Sada primjenom formule za udaljenost dviju točaka u prostoru odredimo kvadrate duljina bridova tetraedra $ABCD$:

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \\ &= x_B^2 - 2x_Bx_A + x_A^2 + y_B^2 - 2y_By_A + y_A^2 + z_B^2 - 2z_Bz_A + z_A^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 \\ &= x_C^2 - 2x_Cx_B + x_B^2 + y_C^2 - 2y_Cy_B + y_B^2 + z_C^2 - 2z_Cz_B + z_B^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|AC|^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 \\ &= x_C^2 - 2x_Cx_A + x_A^2 + y_C^2 - 2y_Cy_A + y_A^2 + z_C^2 - 2z_Cz_A + z_A^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|AD|^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2 \\ &= x_D^2 - 2x_Dx_A + x_A^2 + y_D^2 - 2y_Dy_A + y_A^2 + z_D^2 - 2z_Dz_A + z_A^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|BD|^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2 \\
&= x_D^2 - 2x_Dx_B + x_B^2 + y_D^2 - 2y_Dy_B + y_B^2 + z_D^2 - 2z_Dz_B + z_B^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|CD|^2 &= (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2 \\
&= x_D^2 - 2x_Dx_C + x_C^2 + y_D^2 - 2y_Dy_C + y_C^2 + z_D^2 - 2z_Dz_C + z_C^2.
\end{aligned}
$$

Sa S_2 označimo sumu kvadrata duljina bridova tetraedra $ABCD$. Odredimo S_2:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= |AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 \\
&= x_B^2 - 2x_Bx_A + x_A^2 + y_B^2 - 2y_By_A + y_A^2 + z_B^2 - 2z_Bz_A + z_A^2 \\
&\quad + x_C^2 - 2x_Cx_B + x_B^2 + y_C^2 - 2y_Cy_B + y_B^2 + z_C^2 - 2z_Cz_B + z_B^2 \\
&\quad + x_C^2 - 2x_Cx_A + x_A^2 + y_C^2 - 2y_Cy_A + y_A^2 + z_C^2 - 2z_Cz_A + z_A^2 \\
&\quad + x_D^2 - 2x_Dx_A + x_A^2 + y_D^2 - 2y_Dy_A + y_A^2 + z_D^2 - 2z_Dz_A + z_A^2 \\
&\quad + x_D^2 - 2x_Dx_B + x_B^2 + y_D^2 - 2y_Dy_B + y_B^2 + z_D^2 - 2z_Dz_B + z_B^2 \\
&\quad + x_D^2 - 2x_Dx_C + x_C^2 + y_D^2 - 2y_Dy_C + y_C^2 + z_D^2 - 2z_Dz_C + z_C^2 \\
&= 3x_A^2 + 3x_B^2 + 3x_C^2 + 3x_D^2 - 2(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + ...
\end{aligned}
$$

Primijetimo:

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{9}S_2 &= \frac{4}{9}[3x_A^2 + 3x_B^2 + 3x_C^2 + 3x_D^2 - 2(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + ...] \\
&= \frac{4}{3}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2) - \frac{8}{9}(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + ... = S_1.
\end{aligned}
$$

Ovime smo dokazali da je u tetraedru suma kvadrata duljina težišnica jednaka $\frac{4}{9}$ sume kvadrata duljina bridova. □

Teorem 3.1.2. *Spojnica težišta dviju strana tetraedra paralelna je s bridom tetraedra koji ne pripada niti jednoj od tih strana, a duljina spojnice jednaka je trećini duljine tog brida.*

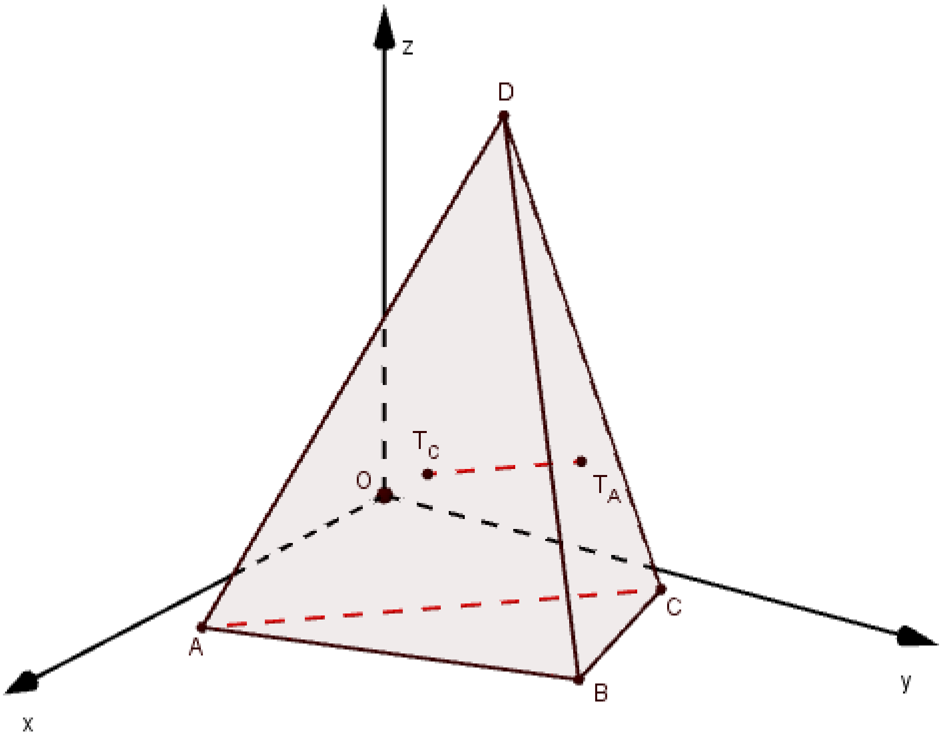
Dokaz. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu dan tetraedar $ABCD$ i neka su koordinate njegovih vrhova: $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$.
Neka je T_C težište strane ABD, a T_A težište strane BCD. Pokažimo da vrijedi:

$$AC \parallel T_CT_A,$$

$$|T_CT_A| = \frac{1}{3}\,|AC|\,.$$

Odredimo vektor smjera pravca AC:

$$\vec{s}_1 = \{x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A\}. \tag{3.1}$$



Slika 3.2: Tetraedar $ABCD$

Kao u primjeru 1.3.1 odredimo koordinate težišta T_C i T_A:

$$T_C\left(\frac{x_A + x_B + x_D}{3}, \frac{y_A + y_B + y_D}{3}, \frac{z_A + z_B + z_D}{3}\right),$$

$$T_A\left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, \frac{y_B + y_C + y_D}{3}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3}\right).$$

Odredimo vektor smjera pravca $T_C T_A$:

$$\vec{s}_2 = \left\{\frac{x_B + x_C + x_D - (x_A + x_B + x_D)}{3}, \frac{y_B + y_C + y_D - (y_A + y_B + y_D)}{3},\right.$$

$$\left.\frac{z_B + z_C + z_D - (z_A + z_B + z_D)}{3}\right\},$$

$$\vec{s}_2 = \left\{ \frac{x_C - x_A}{3}, \frac{y_C - y_A}{3}, \frac{z_C - z_A}{3} \right\}. \tag{3.2}$$

Iz 3.1 i 3.2 uočavamo da vrijedi:

$$\vec{s}_2 = \frac{1}{3} \vec{s}_1.$$

Vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ su kolinearni pa zaključujemo da su pravci AC i $T_C T_A$ paralelni. Ovime smo pokazali da je spojnica težišta strana ABD i BCD tetraedra $ABCD$ paralelna s bridom $\overline{AC}$ (koji ne pripada niti jednoj od tih strana).

Pokažimo da vrijedi: $|T_C T_A| = \frac{1}{3} |AC|$.

Primjenom formule za udaljenost dviju točaka u ravnini odredimo duljinu brida $\overline{AC}$ i duljinu spojnice $\overline{T_C T_A}$.

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} |T_C T_A|^2 &= \left(\frac{x_B + x_C + x_D - (x_A + x_B + x_D)}{3} \right)^2 + \left(\frac{y_B + y_C + y_D - (y_A + y_B + y_D)}{3} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{z_B + z_C + z_D - (z_A + z_B + z_D)}{3} \right)^2 \\ &= \sqrt{\frac{(x_C - x_A)^2}{9} + \frac{(y_C - y_A)^2}{9} + \frac{(z_C - z_A)^2}{9}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Iz 3.3 i 3.4 uočavamo da vrijedi: $|T_C T_A| = \frac{1}{3} |AC|$.

Ovime smo pokazali da je spojnica težišta strana ABD i BCD tetraedra $ABCD$ jednaka trećini duljine brida $\overline{AC}$ (koji ne pripada niti jednoj od tih strana).

Neka su T_B, T_D težišta strana tetraedra nasuprot vrhovima B, D redom. Analogno se pokaže da vrijedi:

$$AB \parallel T_B T_A, |T_B T_A| = \frac{1}{3} |AB|,$$

$$BC \parallel T_C T_B, |T_C T_B| = \frac{1}{3} |BC|,$$

$$AD \parallel T_D T_A, |T_D T_A| = \frac{1}{3} |AD|,$$

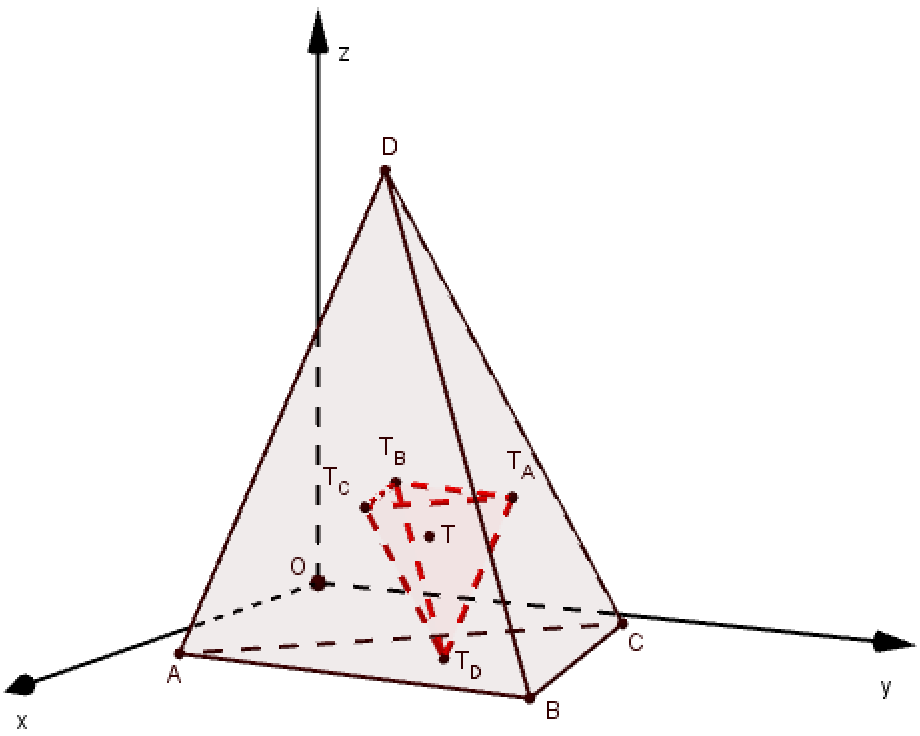
$$BD \parallel T_D T_B, |T_D T_B| = \frac{1}{3} |BD|,$$

$$CD \parallel T_D T_C, |T_D T_C| = \frac{1}{3}|CD|.$$

□

Teorem 3.1.3. *Težišta strana tetraedra vrhovi su novog tetraedra. Tako dobiveni tetraedar i polazni tetraedar imaju zajedničko težište.*

Dokaz. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu dan tetraedar $ABCD$ i neka su T_A, T_B, T_C, T_D težišta strana nasuprot vrhovima A, B, C, D redom. Neka su koordinate vrhova tetraedra: $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$.



Slika 3.3: Tetraedri $ABCD$ i $T_A T_B T_C T_D$

Želimo pokazati da se težišta tetraedara $ABCD$ i $T_A T_B T_C T_D$ podudaraju, odnosno da vrijedi:

$$T_V = T_M,$$

gdje je T_V težište polaznog tetraedra, a T_M težište tetraedra $T_AT_BT_CT_D$.
U dokazu teorema 2.2.2 odredili smo težišta strana tetraedra $ABCD$ i njegovo težište T_V:

$$T_A\left(\frac{x_B+x_C+x_D}{3}, \frac{y_B+y_C+y_D}{3}, \frac{z_B+z_C+z_D}{3}\right),$$
$$T_B\left(\frac{x_A+x_C+x_D}{3}, \frac{y_A+y_C+y_D}{3}, \frac{z_A+z_C+z_D}{3}\right),$$
$$T_C\left(\frac{x_A+x_B+x_D}{3}, \frac{y_A+y_B+y_D}{3}, \frac{z_A+z_B+z_D}{3}\right),$$
$$T_D\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right),$$
$$T_V\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}, \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right).$$

Odredimo težište tetraedra $T_AT_BT_CT_D$ primjenom formula za koordinate težišta:

$$\begin{aligned}
x_{T_M} &= \frac{\frac{x_B+x_C+x_D}{3}+\frac{x_A+x_C+x_D}{3}+\frac{x_A+x_B+x_D}{3}+\frac{x_A+x_B+x_C}{3}}{4} \\
&= \frac{\frac{3x_A+3x_B+3x_C+3x_D}{3}}{4} = \frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{T_M} &= \frac{\frac{y_B+y_C+y_D}{3}+\frac{y_A+y_C+y_D}{3}+\frac{y_A+y_B+y_D}{3}+\frac{y_A+y_B+y_C}{3}}{4} \\
&= \frac{\frac{3y_A+3y_B+3y_C+3y_D}{3}}{4} = \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{T_M} &= \frac{\frac{z_B+z_C+z_D}{3}+\frac{z_A+z_C+z_D}{3}+\frac{z_A+z_B+z_D}{3}+\frac{z_A+z_B+z_C}{3}}{4} \\
&= \frac{\frac{3z_A+3z_B+3z_C+3z_D}{3}}{4} = \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}.
\end{aligned}$$

Dakle, koordinate težišta tetraedra $T_AT_BT_CT_D$ su:

$$T_M\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}, \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right),$$

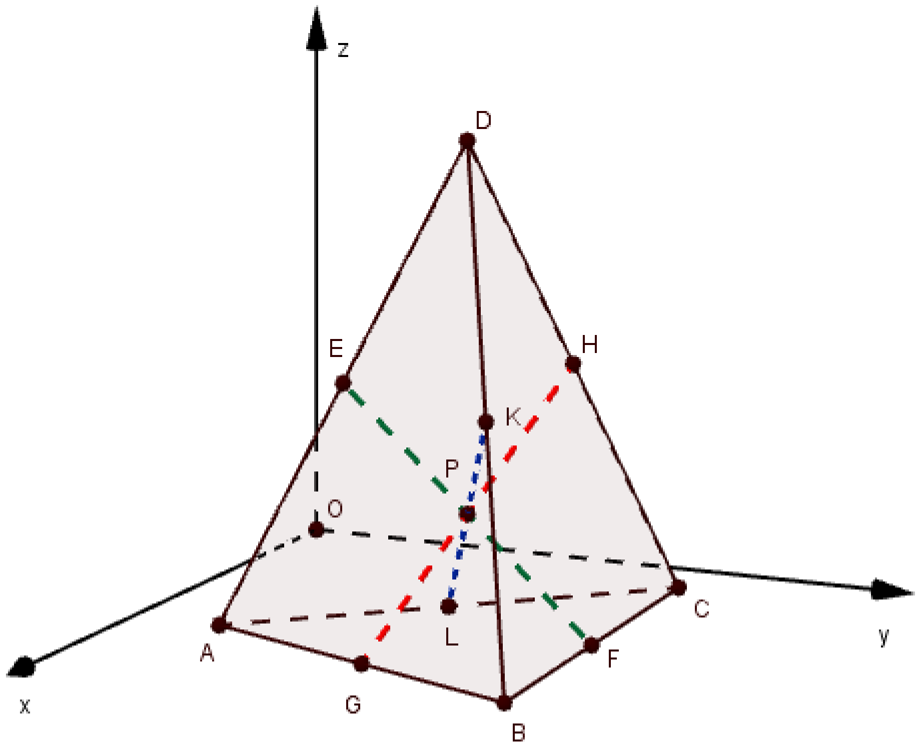
pa vrijedi $T_V = T_M$. □

3.2 Polovišta bridova tetraedra

U ovom potpoglavlju dokazat ćemo tri teorema vezana za polovišta bridova tetraedra. Sva su tri teorema preuzeta iz izvora [9].

Teorem 3.2.1. *Dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih bridova tetraedra sijeku se u jednoj točki i međusobno se raspolavljaju.*

Dokaz. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu dan tetraedar $ABCD$ čiji su vrhovi $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$.



Slika 3.4: Tetraedar $ABCD$

Neka su E, F, G, H, K, L redom polovišta bridova $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{DC}, \overline{BD}, \overline{AC}$. Primjenom formula za koordinate djelišne točke u slučaju kada je ta točka upravo polovište dobivamo:

$$E\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}, \frac{z_A + z_D}{2}\right),$$
$$F\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right),$$
$$G\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right),$$
$$H\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right),$$
$$K\left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}, \frac{z_B + z_D}{2}\right),$$
$$L\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2}\right).$$

Neka je P_1 polovište dužine $\overline{EF}$, P_2 polovište dužine $\overline{GH}$, a P_3 polovište dužine $\overline{KL}$. Ponovnom primjenom formula za koordinate djelišne točke u slučaju kad je ta točka polovište dobivamo:

$$P_1\left(\frac{\frac{x_A + x_D}{2} + \frac{x_C + x_D}{2}}{2}, \frac{\frac{y_A + y_D}{2} + \frac{y_C + y_D}{2}}{2}, \frac{\frac{z_A + z_D}{2} + \frac{z_C + z_D}{2}}{2}\right),$$

$$P_1\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\right).$$

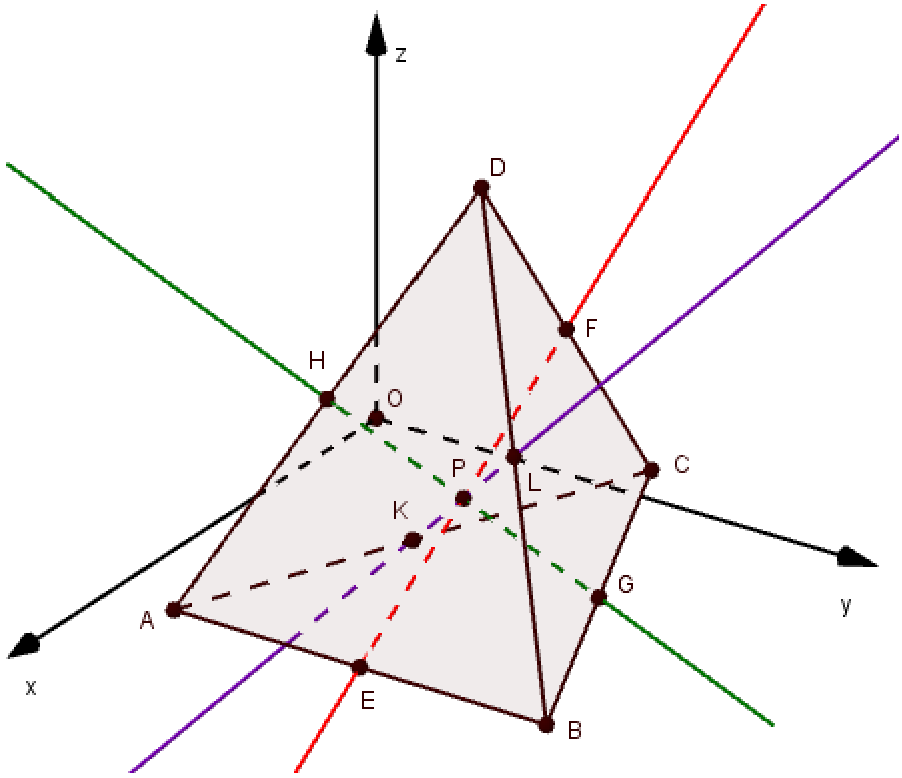
Analogno odredimo koordinate polovišta P_2 i P_3 i dobijemo:

$$P_2\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\right),$$

$$P_3\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\right).$$

Vidimo da se polovišta svih triju dužina čije su krajnje točke polovišta nasuprotnih bridova tetraedra podudaraju što znači da se radi o jednoj točki što smo i trebali dokazati. □

Teorem 3.2.2. *Pravci određeni polovištima dvaju nasuprotnih bridova tetraedra sijeku se u jednoj točki.*



Slika 3.5: Tetraedar $ABCD$ i pravci određeni polovištima nasuprotnih bridova

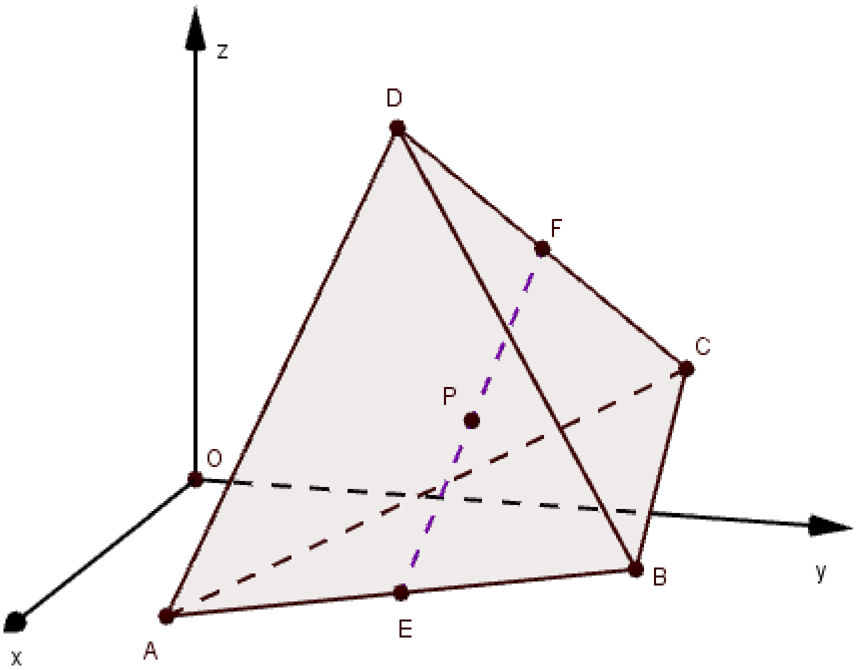
Osim što se sijeku u jednoj točki, pravci određeni polovištima nasuprotnih bridova tetraedra sijeku se upravo u težištu tetraedra. Stoga ćemo teorem 3.2.2 dokazati kroz dokaz sljedećeg teorema:

Teorem 3.2.3. *Polovište spojnice polovišta dvaju nasuprotnih bridova tetraedra je težište tog tetraedra.*

Dokaz. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu dan tetraedar $ABCD$ čije su koordinate vrhova: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$.
Neka su E i F polovišta dvaju nasuprotnih bridova $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Primjenom formula za koordinate djelišne točke, u slučaju kad je ta točka upravo polovište dužine, odredimo koordinate točaka E i F:

$$E\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right),$$

$$F\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right).$$



Slika 3.6: Tetraedar $ABCD$ i polovište spojnice $\overline{EF}$

Ponovnom primjenom istih formula odredimo koordinate polovišta P_1 spojnice $\overline{EF}$:

$$P_1\left(\frac{\frac{x_A+x_B}{2}+\frac{x_C+x_D}{2}}{2}, \frac{\frac{y_A+y_B}{2}+\frac{y_C+y_D}{2}}{2}, \frac{\frac{z_A+z_B}{2}+\frac{z_C+z_D}{2}}{2}\right)$$

$$P_1\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right).$$

Neka je T težište tetraedra $ABCD$. U dokazu teorema 2.2.2 odredili smo njegove koordinate:

$$T\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right).$$

Koordinate polovišta P_1 spojnice $\overline{EF}$ i težišta T tetraedra podudaraju se pa zaključujemo da se radi o istoj točki.
Neka su G, H, L, K redom polovišta bridova $\overline{BC}, \overline{AD}, \overline{AC}, \overline{BD}$ redom. Analognim računom pokaže se da za polovišta P_2 i P_3 spojnica $\overline{GH}$ i $\overline{KL}$ vrijedi:

$$P_1 = P_2 = P_3 = T = \left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right).$$

Ovime smo pokazali da je polovište spojnice dvaju nasuprotnih bridova tetraedra težište tog tetraedra. □

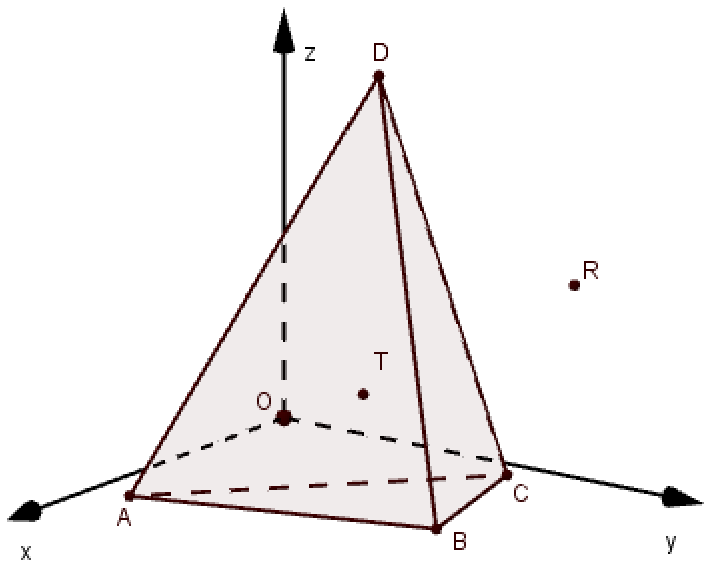
3.3 Još neka svojstva tetraedra

Prvi i treći teorem ovog potpoglavlja preuzeti su iz izvora [9], a drugi teorem preuzet je iz izvora [6].

Teorem 3.3.1. *Zbroj kvadrata udaljenosti bilo koje točke prostora od vrhova tetraedra jednak je zbroju kvadrata udaljenosti polovišta nasuprotnih bridova i četverostrukog kvadrata udaljenosti te točke od težišta tetraedra.*

Dokaz. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu dan tetraedar $ABCD$ čije su koordinate vrhova: $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$.
Neka su $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ redom polovišta bridova $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$. Neka je T težište tetraedra, a $R(x, y, z)$ neka točka prostora. Pokažimo da vrijedi:

$$|RA|^2 + |RB|^2 + |RC|^2 + |RD|^2 = |P_1P_6|^2 + |P_2P_4|^2 + |P_3P_5|^2 + 4|RT|^2.$$



Slika 3.7: Tetraedar $ABCD$, težište T i točka R

Korištenjem formula za koordinate djelišne točke, u slučaju kad je ta točka polovište dužine, odredimo koordinate polovišta bridova tetraedra. Dobivamo:

$$P_1\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right),$$

$$P_2\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right),$$

$$P_3\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2}\right),$$

$$P_4\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}, \frac{z_A + z_D}{2}\right),$$

$$P_5\left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}, \frac{z_B + z_D}{2}\right),$$

$$P_6\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right).$$

Iz dokaza teorema 2.2.2 slijedi da su koordinate težišta danog tetraedra:

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

Sa S_1 označimo zbroj kvadrata udaljenosti točke R od vrhova tetraedra, a sa S_2 zbroj kvadrata udaljenosti polovišta nasuprotnih bridova tetraedra i četverostrukog kvadrata udaljenosti točke R od težišta tetraedra. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
|RA|^2 &= (x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2 \\
&= x_A^2 - 2xx_A + x^2 + y_A^2 - 2yy_A + y^2 + z_A^2 - 2zz_A + z^2 \\
&= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 2(xx_A + yy_A + zz_A) + x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}$$

Analogno:

$$\begin{aligned}
|RB|^2 &= x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - 2(xx_B + yy_B + zz_B) + x^2 + y^2 + z^2, \\
|RC|^2 &= x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - 2(xx_C + yy_C + zz_C) + x^2 + y^2 + z^2, \\
|RD|^2 &= x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 - 2(xx_D + yy_D + zz_D) + x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
S_1 &= |RA|^2 + |RB|^2 + |RC|^2 + |RD|^2 \\
&= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 + x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 \\
&\quad - 2x(x_A + x_B + x_C + x_D) - 2y(y_A + y_B + y_C + y_D) - 2z(z_A + z_B + z_C + z_D) \\
&\quad + 4(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Odredimo kvadrate udaljenosti polovišta nasuprotnih bridova tetraedra:

$$\begin{aligned}
|P_1P_6|^2 &= \left(\frac{x_C + x_D}{2} - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_C + y_D}{2} - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_C + z_D}{2} - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_B + x_Cx_D) - 2(x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D)] + ...
\end{aligned}$$

gdje smo s tri točke označili da se algebarski izrazi nastavljaju analogonima napisanih izraza prvo za za y, a potom za z koordinate.
Analogno:

$$\begin{aligned}
|P_2P_4|^2 &= \frac{1}{4}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_D + x_Bx_C) - 2(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Bx_D + x_Cx_D)] + ... \\
|P_3P_5|^2 &= \frac{1}{4}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_C + x_Bx_D) - 2(x_Ax_B + x_Bx_C + x_Ax_D + x_Cx_D)] + ...
\end{aligned}$$

Preostaje odrediti četverostruki kvadrat udaljenosti točke R od težišta T tetraedra. Imamo:

$$\begin{aligned}
4|RT|^2 &= 4 \cdot \left[\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} - y\right)^2 + \left(\frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} - z\right)^2\right] \\
&= 4 \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot (x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 - 8x(x_A + x_B + x_C + x_D)\right. \\
&\quad \left. + 2(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + 16x^2) + ...\right] \\
&= \frac{1}{4}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2) - 2x(x_A + x_B + x_C + x_D) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + 4x^2 + ...
\end{aligned}$$

Sada je:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= |P_1P_6|^2 + |P_2P_4|^2 + |P_3P_5|^2 + 4|RT|^2 \\
&= \frac{1}{4}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_B + x_Cx_D) - 2(x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D)] + ... \\
&\quad + \frac{1}{4}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_D + x_Bx_C) - 2(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Bx_D + x_Cx_D)] + ... \\
&\quad + \frac{1}{4}[x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2 + 2(x_Ax_C + x_Bx_D) - 2(x_Ax_B + x_Bx_C + x_Ax_D + x_Cx_D)] + ... \\
&\quad + \frac{1}{4}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + x_D^2) - 2x(x_A + x_B + x_C + x_D) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x_Ax_B + x_Ax_C + x_Ax_D + x_Bx_C + x_Bx_D + x_Cx_D) + 4x^2 + ... \\
&= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 + x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 \\
&\quad - 2x(x_A + x_B + x_C + x_D) - 2y(y_A + y_B + y_C + y_D) - 2z(z_A + z_B + z_C + z_D) \\
&\quad + 4(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Uspoređivanjem 3.5 i 3.6 uočavamo da vrijedi

$$S_1 = S_2,$$

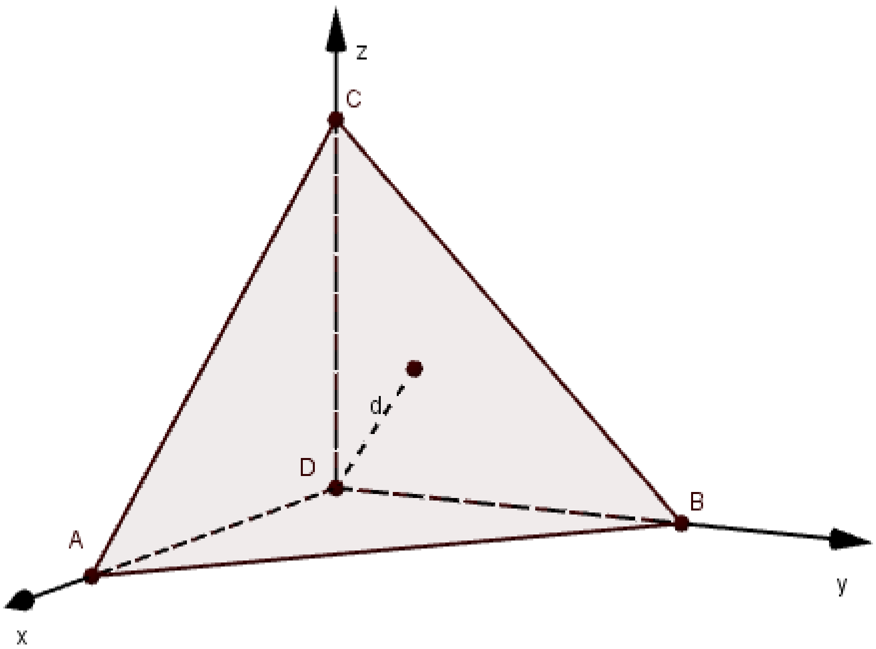
čime smo pokazali da je zbroj kvadrata udaljenosti bilo koje točke prostora od vrhova tetraedra jednak je zbroju kvadrata udaljenosti polovišta nasuprotnih bridova i četverostrukog kvadrata udaljenosti te točke od težišta tetraedra. □

Teorem 3.3.2. *Neka je dan tetraedar $ABCD$ kojemu su bridovi iz vrha D međusobno okomiti i neka je $|AD| = a, |BD| = b, |CD| = c$. Tada vrijedi:*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2},$$

gdje je d udaljenost vrha D od strane ABC,

Dokaz. Smjestimo tetraedar $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav tako da se točka D nalazi u ishodištu koordinatnog sustava. Tada su koordinate vrhova tetraedra:
$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c), D(0, 0, 0)$.



Slika 3.8: Tetraedar $ABCD$

Odredimo jednadžbu ravnine određene točkama A, B i C:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (x-a)bc - y(ac) + zab &= 0 \\ xbc + ybc + zab - abc &= 0 \\ \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Kako je udaljenost točke D od ravnine određene točkama A, B, C jednaka d primjenom formule za udaljenost točke od ravnine dobivamo:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|\frac{1}{a}\cdot 0+\frac{1}{b}\cdot 0+\frac{1}{c}\cdot 0-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} \\ d &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Kvadriranjem posljednje jednakosti slijedi:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2},$$

što smo i trebali dokazati.

□

Sljedeći se teorem odnosi na pravokutni tetraedar. Tetraedar je **pravokutni** ako su mu tri brida sa zajedničkim vrhom međusobno okomiti.

Teorem 3.3.3. *Neka je dan pravokutni tetraedar $ABCD$ s pravim kutom pri vrhu D. Neka je točka T težište strane ABC, a S središte sfere opisane tetraedru. Tada su točke D, T i S kolinearne.*

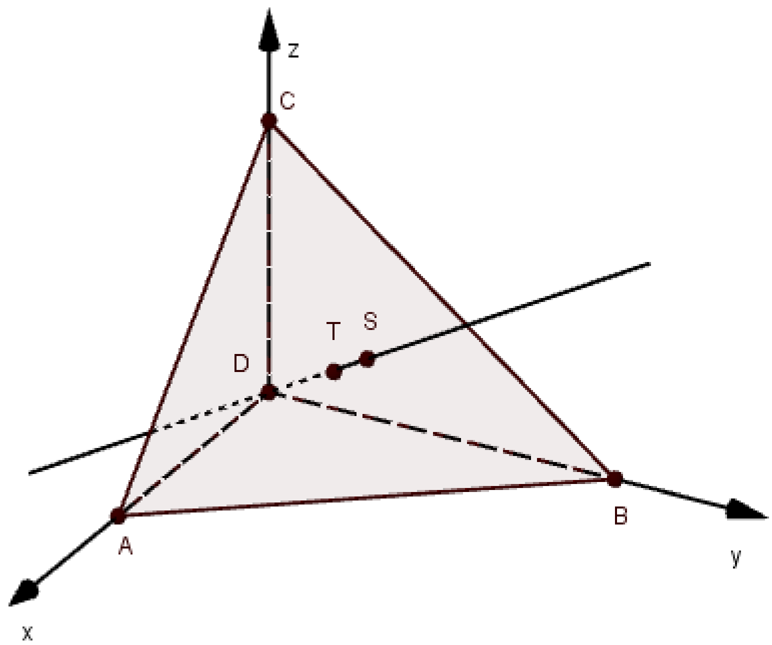
Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, smjestimo tetraedar $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav tako da se vrh D nalazi u ishodištu koordinatnog sustava. Tada su koordinate vrhova tetraedra: $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), D(0,0,0)$.
Korištenjem formula za koordinate težišta trokuta odredimo težište strane ABC:

$$T\left(\frac{a+0+0}{3}, \frac{0+b+0}{3}, \frac{0+0+c}{3}\right),$$

$$T\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Kako je točka $S(x_S, y_S, z_S)$ središte tetraedru opisane sfere, vrijedi:

$$|SA| = |SB| = |SC| = |SD|.$$



Slika 3.9: Tetraedar $ABCD$, težište strane ABC i središte opisane sfere

Iz $|SA| = |SB|$ slijedi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-x_S)^2+(-y_S)^2+(-z_S)^2} &= \sqrt{(-x_S)^2+(b-y_S)^2+(-z_S)^2}\\
(a-x_S)^2+y_S^2+z_S^2 &= x_S^2+(b-y_S)^2+z_S^2\\
a^2-2ax_S+x_S^2+y_S^2 &= x_S^2+b^2-2by_S+y_S^2
\end{aligned}$$

$$a^2-2ax_S = b^2-2by_S. \tag{3.7}$$

Analogno, iz $|SB| = |SC|$ slijedi:

$$b^2-2by_S = c^2-2cz_S, \tag{3.8}$$

a iz $|SC| = |SD|$ slijedi:

$$c^2-2cz_S = 0. \tag{3.9}$$

Iz posljednje jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} 2cz_S &= c^2 \\ z_S &= \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem 3.9 u 3.8 dobivamo:

$$\begin{aligned} b^2 - 2by_S &= 0 \\ 2by_S &= b^2 \\ y_S &= \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Dobiveni y_S uvrstimo u 3.7 pa imamo:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ax_S &= b^2 - 2b\frac{b}{2} \\ a^2 - 2ax_S &= b^2 - b^2 \\ a^2 - 2ax_S &= 0 \\ 2ax_S &= a^2 \\ x_S &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, koordinate središta tetraedru $ABCD$ opisane sfere jesu:

$$T\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

Kako bismo pokazali da su točke D, T i S kolinearne, pokažimo da su vektori smjera pravaca DT i DS linearno zavisni.
Vektor smjera pravca DT jednak je:

$$\vec{s}_1 = \left\{\frac{a}{3} - 0, \frac{b}{3} - 0, \frac{c}{3} - 0\right\} = \left\{\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right\}.$$

Vektor smjera pravca DS jednak je:

$$\vec{s}_2 = \left\{\frac{a}{2} - 0, \frac{b}{2} - 0, \frac{c}{2} - 0\right\} = \left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right\}.$$

Uočavamo da vrijedi:

$$\vec{s}_1 = \frac{2}{3}\vec{s}_2,$$

što znači da su vektori smjera pravaca DT i DS linearno zavisni, a kako ti pravci prolaze istom točkom, to znači da se radi o jednom pravcu, odnosno da su točke D, T i S kolinearne.

□

Poglavlje 4

Srednjoškolski stereometrijski problemi

Na početku poglavlja dokazat ćemo teorem primjeren učenicima srednje škole, a u nastavku poglavlja prikazat ćemo rješenja ili dokaze zadataka koji se pojavljuju u srednjoškolskim udžbenicima i matematičkim natjecanjima. Zadatke ćemo riješiti koordinatnom metodom.

Paralelepiped je prizma kojoj su baze paralelogrami.
Sljedeći je teorem preuzet iz izvora [10], a prema kompleksnosti dokaza primjeren je učenicima na srednjoškolskoj razini obrazovanja:

Teorem 4.0.1. *Četiri dijagonale paralelepipeda prolaze jednom točkom O, koja je polovište svake od tih dijagonala. Tu točku O zovemo središtem paralelepipeda.*

Dokaz. Neka je dan paralelepiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i neka su koordinate paralelograma $ABCD$ dane s: $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$. Tada su koordinate paralelograma $A_1B_1C_1D_1$ dane s: $A_1(x_A + a, y_A + b, z_A + c), B_1(x_B + a, y_B + b, z_B + c), C_1(x_C + a, y_C + b, z_C + c), D_1(x_D + a, y_D + b, z_D + c)$, gdje su a, b, c realni brojevi.
Kako je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepiped, to je BCA_1D_1 paralelogram i vrijedi:

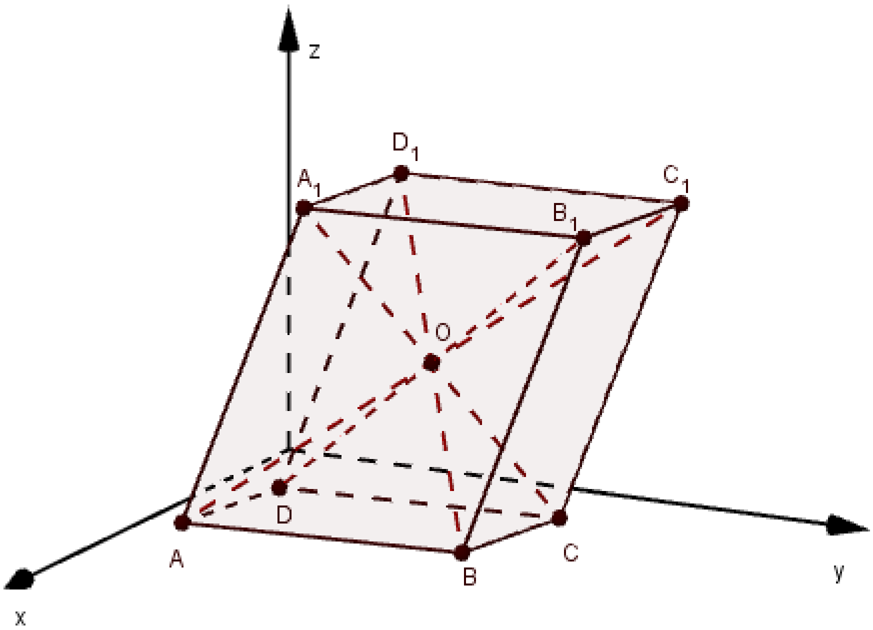
$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |A_1D_1|^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2. \end{aligned}$$

Pravci BC i A_1D_1 su paralelni što znači da su im vektori smjera kolinearni.
Vrijedi:

$$\frac{x_C - x_B}{x_D - x_A} = \frac{y_C - y_B}{y_D - y_A} = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = k, \text{ za neki } k \in \mathbb{R},$$

odnosno:

$$\begin{cases} x_C - x_B = k(x_D - x_A) \\ y_C - y_B = k(y_D - y_A) \\ z_C - z_B = k(z_D - z_A). \end{cases}$$



Slika 4.1: Paralelepiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i njegovo središte

Uvrštavanjem dobivenih jednakosti u $|BC|^2 = |A_1D_1|^2$ slijedi:

$$k^2(x_D - x_A)^2 + k^2(y_D - y_A)^2 + k^2(x_D - x_A)^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2,$$
$$(x_D - x_A)^2(k^2 - 1) + (y_D - y_A)^2(k^2 - 1) + (z_D - z_A)^2(k^2 - 1) = 0.$$

Kako su $x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A \neq 0$, zaključujemo da mora vrijediti: $k^2 - 1 = 0$, odnosno $k = 1$.
Ako je $k = 1$ onda je:

$$\begin{cases} x_C - x_B = x_D - x_A \\ y_C - y_B = y_D - y_A \\ z_C - z_B = z_D - z_A. \end{cases}$$

Neka su $0_1, O_2, O_3, O_4$ polovišta dijagonala $\overline{AC_1}, \overline{CA_1}, \overline{BD_1}, \overline{DB_1}$. Prema formulama za koordinate djelišne točke, gdje je djelišna točka upravo polovište dužine, dobivamo:

$$O_1\left(\frac{x_A + x_C + a}{2}, \frac{y_A + y_C + a}{2}, \frac{z_A + z_C + a}{2}\right),$$
$$O_2\left(\frac{x_C + x_A + a}{2}, \frac{y_C + y_A + a}{2}, \frac{z_C + z_A + a}{2}\right),$$

$$O_3\left(\frac{x_B + x_D + a}{2}, \frac{y_B + y_D + a}{2}, \frac{z_B + z_D + a}{2}\right),$$
$$O_4\left(\frac{x_D + x_B + a}{2}, \frac{y_D + y_B + a}{2}, \frac{z_D + z_B + a}{2}\right).$$

Očito je $O_1 = O_2$ i $O_3 = O_4$. Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata pokažimo da vrijedi $O_2 = O_3$:

$$\begin{cases} \dfrac{x_C + x_A + a}{2} = \dfrac{x_B + x_D + a}{2} \\ \dfrac{y_C + y_A + a}{2} = \dfrac{y_B + y_D + a}{2} \\ \dfrac{z_C + z_A + a}{2} = \dfrac{z_B + z_D + a}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C + x_A = x_B + x_D \\ y_C + y_A = y_B + y_D \\ z_C + z_A = z_B + z_D, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C + x_A = x_B + x_D \\ y_C + y_A = y_B + y_D \\ z_C + z_A = z_B + z_D, \end{cases}$$

odnosno:

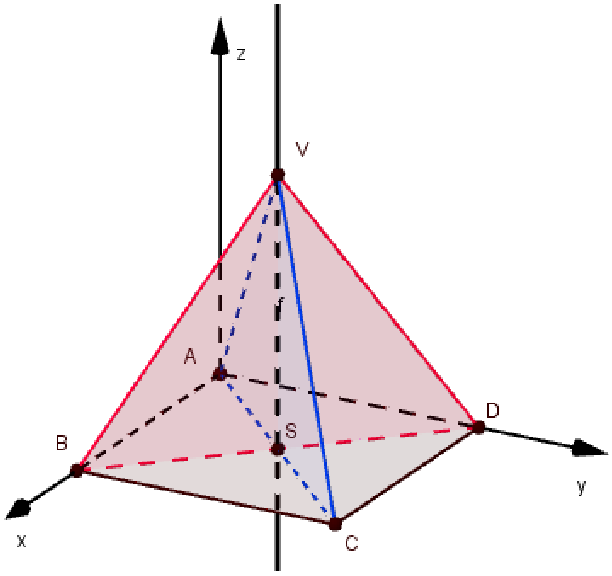
$$\begin{cases} x_C - x_B = x_D - x_A \\ y_C - y_B = y_D - y_A \\ z_C - z_B = z_D - z_A, \end{cases}$$

što smo pokazali da vrijedi za $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepiped.
Ovime smo pokazali da četiri dijagonale paralelepipeda prolaze jednom točkom O, koja je polovište svake od tih dijagonala. □

Sljedeća dva primjera preuzeta su iz izvora [5].

Primjer 4.0.2. *Nacrtaj pravilnu četverostranu piramidu s osnovkom $ABCD$ i vrhom V. U kakvom su odnosu ravnine ACV i BDV? Odredi njihov presjek.*

Rješenje primjera: Smjestimo piramidu $ABCDV$, gdje je V vrh piramide, u pravokutni koordinatni sustav na način kako je prikazano na slici.
Vrh A nalazi se u ishodištu koordinatnog sustava pa su njegove koordinate $A(0, 0, 0)$. Koordinate preostalih vrhova baze jesu: $B(b, 0, 0), C(b, b, 0), D(0, b, 0)$, a vrh piramide je $V\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, v\right)$.



Slika 4.2: Pravilna četverostrana piramida

Odredimo jednadžbu ravnine ACV. Uvrštavanjem koordinata točaka A, C, V u jednadžbu ravnine kroz tri točke dobivamo:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ b-0 & b-0 & 0-0 \\ \frac{b}{2}-0 & \frac{b}{2}-0 & v-0 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{aligned} x(bv) - y(bv) + z\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) &= 0 \\ bvx - bvy &= 0. \end{aligned}$$

Analogno odredimo i jednadžbu ravnine BDV:

$$\begin{vmatrix} x-b & y-0 & z-0 \\ 0-b & b-0 & 0-0 \\ \frac{b}{2}-b & \frac{b}{2}-0 & v-0 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{aligned}(x-b)bv - y(-bv) + z\left(\frac{-b^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) &= 0\\ bvx + bvy - b^2 &= 0.\end{aligned}$$

Vektori normala ravnina ACV i BDV su: $\vec{n}_{ACV} = \{bv, -bv, 0\}$ i $\vec{n}_{BDV} = \{bv, bv, -b^2v\}$. Pomnožimo ih skalarno:

$$\vec{n}_{ACV} \cdot \vec{n}_{BDV} = \{bv, -bv, 0\} \cdot \{bv, bv, -b^2v\} = (bv)^2 - (bv)^2 = 0.$$

Skalarni umnožak vektora normala ravnina ACV i BDV jednak je nuli iz čega zaključujemo da su ravnine međuosbno okomite. Tada je njihov presjek pravac. Odredimo njegovu jednadžbu:

$$\begin{aligned}bvx - bvy &= bvx + bvy - b^2v\\ 2bvy &= b^2v\\ y &= \frac{b}{2}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog y u jednadžbu ravnine ACV dobivamo:

$$\begin{aligned}bvx - bv\frac{b}{2} &= 0\\ bvx &= \frac{b^2v}{2}\\ x &= \frac{b}{2}.\end{aligned}$$

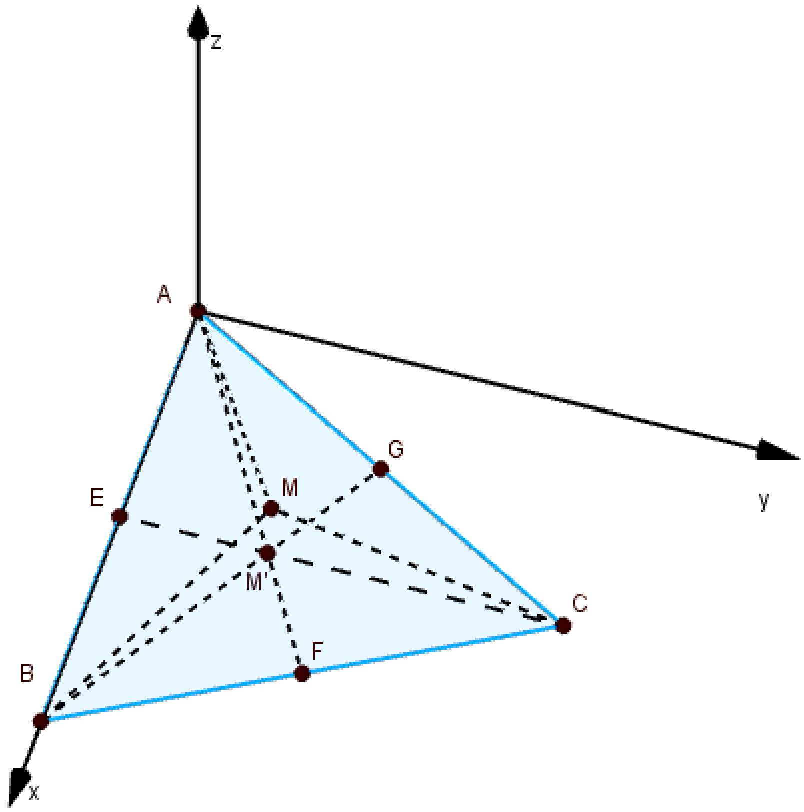
Dakle, jednadžba traženog presjeka je:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b}{2}\\ y = \dfrac{b}{2}\\ z \in \mathbb{R},\end{cases}$$

a to je upravo jednadžba pravca kroz točke V i S, gdje je S središte osnovke piramide.

Primjer 4.0.3. *Točka M udaljena je od svakog vrha jednakostraničnog trokuta $\sqrt{13}$ centimetara, a od svake stranice trokuta 2 centimetra. Koliko je točka M udaljena od ravnine trokuta?*

Rješenje primjera: Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu dan jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ s koordinatama vrhova: $A(0,0,0), B(b,0,0), C\left(\frac{b}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.



Slika 4.3: Trokut ABC i točka M

Neka su E, F, G polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$ redom. Koordinate tražene točke M označit ćemo s $M(x_M, y_M, z_M)$. Budući da je točka M jednako udaljena od svih triju stranica trokuta i od svih triju vrhova trokuta, zaključujemo da se točka nalazi na okomici na ravninu trokuta (u našem slučaju $xy-$ravninu) i prolazi središtem trokuta. Središte trokuta je točka M' koja je ujedno i ortogonalna projekcija točke M na ravninu trokuta. Budući da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan, vrijedi: $|EM'| = 2\,|M'C|$ i $|EM'| + |M'C| = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Imamo:

$$\begin{aligned} 3\,|EM'| &= \frac{b\sqrt{3}}{2} \\ |E'M| &= \frac{b\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Kako je pravac EM' okomit na $x-$os, a polovište E stranice $\overline{AB}$ ima koordinate $E\left(\frac{b}{0}, 0, 0\right)$, to su koordinate točke M' jednake: $M'\left(\frac{b}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{6}, 0\right)$.

Točka M' ortogonalna je projekcija točke M na $xy-$ravninu pa će koordinate točke M biti jednake $M\left(\frac{b}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{6}, z_M\right)$. Odredimo aplikatu tražene točke.

Točka M je od svakog vrha trokuta udajena $\sqrt{13}$ centimetara pa vrijedi:

$$\begin{aligned} |AM| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2 + z_M^2} &= \sqrt{13} \\ \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{12} + z_M^2 &= 13 \\ z_M^2 &= 13 - \frac{b^2}{3} \\ z_M &= \sqrt{13 - \frac{b^2}{3}}. \end{aligned}$$

Točka M je od svake stranice trokuta udaljena 2 centimetra pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
|EM| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2+(-z_M)^2} &= 2\\
\frac{b^2}{12}+z_M^2 &= 4\\
z_M^2 &= 4-\frac{b^2}{12}\\
z_M &= \sqrt{4-\frac{b^2}{12}}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobivenih z_M iz prve i druge jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{13-\frac{b^2}{3}} &= \sqrt{4-\frac{b^2}{12}}\\
13-\frac{b^2}{3} &= 4-\frac{b^2}{12}\\
\frac{b^2}{12}-\frac{b^2}{3} &= 4-13\\
\frac{b^2}{4} &= 9,\\
b^2 &= 36\\
b &= 6.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog rezultata u $z_M = \sqrt{13-\frac{b^2}{3}}$ dobivamo:

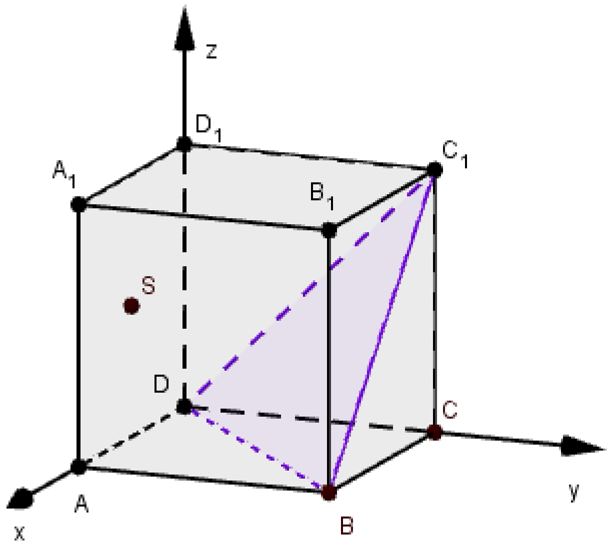
$$z_M = \sqrt{13-\frac{36}{3}} = \sqrt{13-12} = \sqrt{1} = 1.$$

Dobili smo da je udaljenost točke M od ravnine trokuta $\triangle ABC$ (stranice duljine 6 cm) jednaka 1 centimetar.

Sada ćemo dokazati tvrdnju preuzetu iz izvora [6].

Primjer 4.0.4. *Dokažite da je u kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a udaljenost središta S strane ADD_1A_1 od ravnine BC_1D jednaka $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.*

Rješenje primjera: Smjestimo kocku u pravokutni koordinatni sustav tako da su koordinate vrhova kocke:
$A(a,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), D(0,0,0), A_1(a,0,a), B_1(a,a,a), C_1(0,a,a), D_1(0,0,a)$.
Središte jedne strane kocke sjecište je dijagonala kvadrata. Budući da se dijagonale kvadrata raspolavljaju, središte S strane ADD_1A_1 polovište je dužine $\overline{A_1D}$. Ono ima koordinate $S\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$.



Slika 4.4: Kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Odredimo jednadžbu ravnine BC_1D. Koordinate točaka B, C_1, D uvrstimo u formulu za jednadžbu ravnine određene s tri nekolinearne točke:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a & z-0 \\ 0-a & a-a & a-0 \\ 0-a & 0-a & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a & z \\ -a & 0 & a \\ -a & -a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}(x-a)(0+a^2)-(y-a)(0+a^2)+z(a^2-0) &= 0\\ a^2x-a^b3-a^2y+a^3+a^2z &= 0\\ a^2(x-y+z) &= 0.\end{aligned}$$

Iz toga slijedi $x-y+z=0$.
Uvrštavanjem u formulu za udaljenost točke od ravnine dobivamo da je udaljenost točke S od ravnine BC_1D iznosi:

$$d(S,BC_1D)=\frac{\left|\frac{a}{2}-0+\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

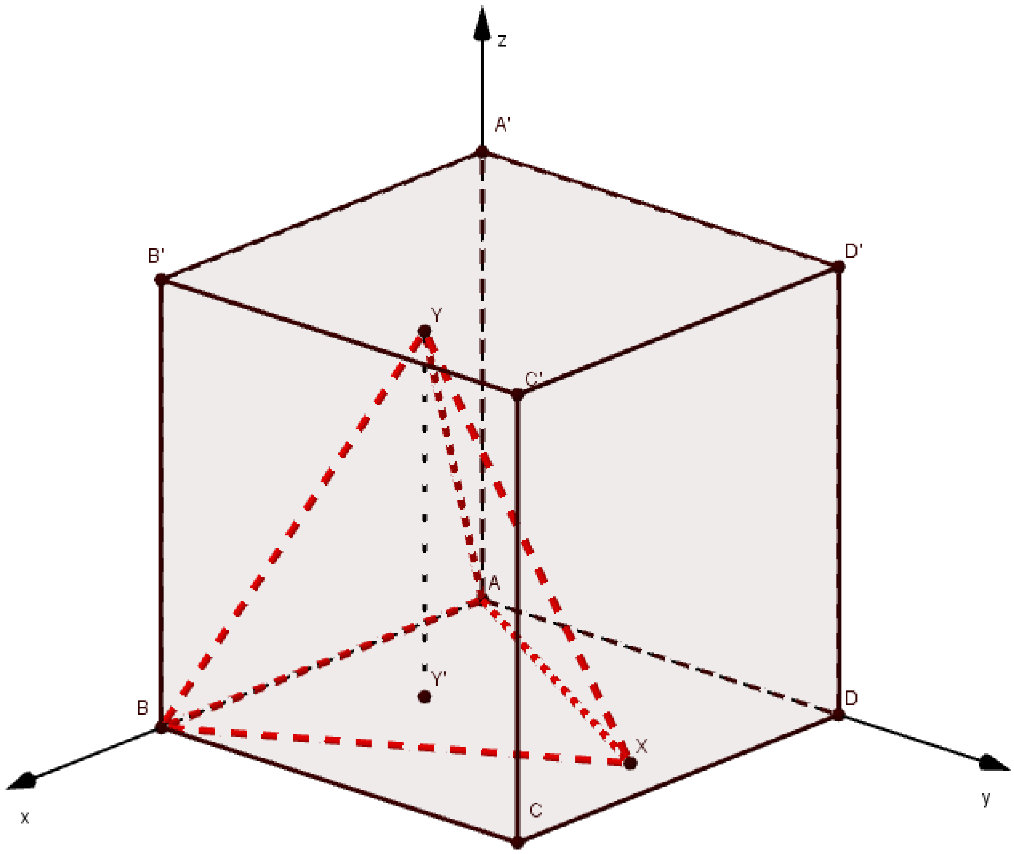
Sljedeći zadatak preuzet je sa školskog (općinskog) natjecanja iz matematike 2011. godine za učenike 4. razreda srednje škole u A varijanti testa. Kao i u prethodnim primjerima, na natjecanju je zadatak riješen sintetičkom metodom dok ćemo ga mi ovdje riješiti koordinatnom metodom.

Primjer 4.0.5. *Pravilni tetraedar $ABXY$ smješten je u kocku $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine* 1 *tako da točka X pripada ravnini $ABCD$. Odredite udaljenost točaka Y i A'.*

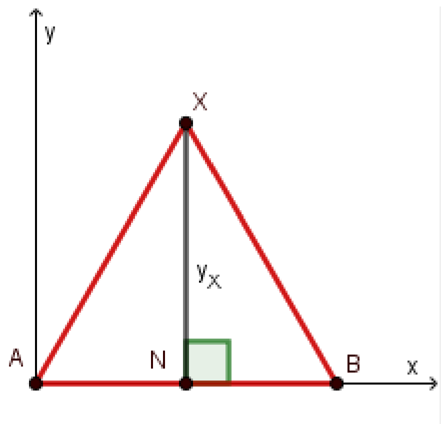
Rješenje primjera: Smjestimo kocku u pravokutni koordinatni sustav tako da su koordinate njenih vrhova: $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), A'(0,0,1), B'(1,0,1), C'(1,1,1), D'(0,1,1)$.
Da bismo izračunali udaljenost između točaka Y i A' potrebno je odrediti koordinate od Y. Točka x pripada ravnini $ABCD$, a trokut ABX je jednakostraničan iz čega slijedi da su koordinate točke X jednake $X\left(\frac{1}{2},y_X,0\right)$.

Kako je $|AX|=1$ i $|AN|=\frac{1}{2}$ gdje je N nožište okomice iz vrha X na stranicu AB trokuta $\triangle ABX$ (slika) onda vrijedi:

$$\begin{aligned}y_X^2 &= 1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ y_X^2 &= 1-\frac{1}{4}\\ y_X^2 &= \frac{3}{4}\\ y_X &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$



Slika 4.5: Tetraedar upisan kocki

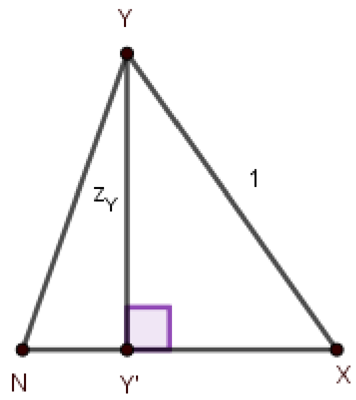


Slika 4.6: Trokut *ABX*

Dakle, koordinate točke X jesu $X\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
Točka Y' ortogonalna je projekcija vrha Y tetraedra $ABXY$ na $xy-$ravninu pa su njene koordinate jednake $Y'\left(\frac{1}{2}, y'_Y, 0\right)$.
Istovremeno, jer je tetraedar pravilan, točka Y' težište je trokuta ABX. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} |NY| &= \frac{1}{3}|NX| \\ |NY| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |NY| &= \frac{\sqrt{3}}{6}, \end{aligned}$$

što je upravo jednako ordinati točke Y'. Sada su koordinate točke Y' jednake $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$.
Brid $\overline{XY}$, visina $\overline{YY'}$ i spojnica $\overline{XY'}$ tvore pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu Y'.



Slika 4.7: Trokut NXY

Kako je $|NX| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a $|NY'| = \frac{\sqrt{3}}{6}$, to je:

$$|Y'X| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Sada primjenom Pitagorinog poučka za pravokutni trokut $\triangle Y'XY$ dobivamo:

$$z_Y^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{odnosno } z_Y = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

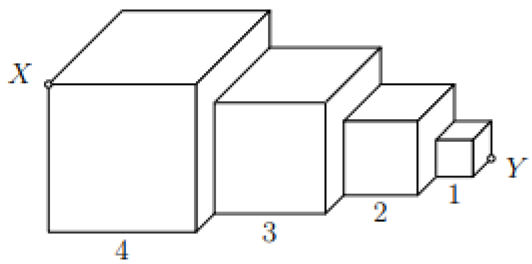
Iz ovoga slijedi da su koordinate točke Y jednake: $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Konačno, primjenom formule za udaljenost dviju točaka u prostoru odredimo udaljenost točaka Y i A':

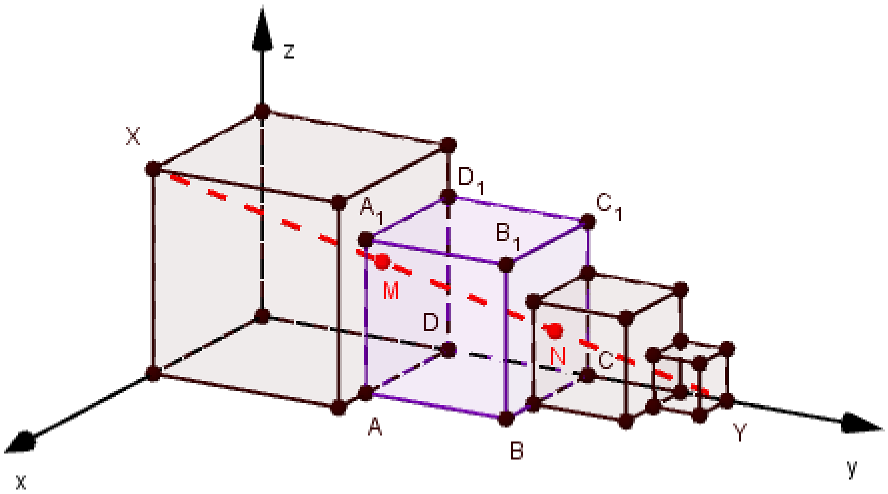
$$\begin{aligned} |YA'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Sljedeći zadatak preuzet je sa školskog (općinskog) natjecanja iz matematike 2018. godine za učenike 3. razreda srednje škole u A varijanti testa.

Primjer 4.0.6. *Četiri kocke duljina bridova* $1, 2, 3, 4$ *nalaze se jedna do druge kao na slici. Odredi duljinu dijela dužine* $\overline{XY}$ *koji se nalazi unutar brida duljine* 3.



Rješenje primjera: Smjestimo kocke u pravokutni koordinatni sustav kao na slici 4.8. Kocku čija je duljina brida jednaka 4 postavimo tako da joj tri brida pripadaju koordinatnim osima.



Slika 4.8: Slika primjera

Duljinu dijela dužine $\overline{XY}$ koji se nalazi unutar kocke brida duljine 3 (kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$) odredit ćemo tako što ćemo izračunati udaljenost točaka koje su presjek pravca s odgovarajućim stranama kocke. Točke X i Y imaju koordinate $X(4,0,4), Y(0,10,0)$. Odredimo parametarsku jednadžbu pravca koji prolazi točkama X i Y:

$$\begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 10\lambda \\ z = 4 - 4\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pravac XY kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ siječe na strani ADD_1A_1 u točki M, a na strani BCC_1B_1 u točki N.
Odredimo jednadžbu ravnine određene točkama $A(3,4,0), D(0,4,0), D_1(0,4,3)$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-0 \\ 0-3 & 0-0 & 0-0 \\ 0-3 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (x-3)\cdot 0-(y-4)(-9-0)+z\cdot 0 &= 0\\ 9y-36 &= 0\\ y &= 4 \end{aligned}$$

Presjek ravnine i pravca XY odredit ćemo uvrštavanjem $y = 4$ u jednadžbu pravca. Iz $y = 4 = 10\lambda$ slijedi: $\lambda = \frac{2}{5}$ pa su koordinate sjecišta M jednake:

$$\begin{cases} x = 4 - 4\cdot\frac{2}{5} = \frac{12}{5}\\ y = 4\\ z = 4 - 4\cdot\frac{2}{5} = \frac{12}{5}, \end{cases}$$

odnosno: $M\left(\frac{12}{5}, 4, \frac{12}{5}\right)$.
Analogno odredimo jednadžbu ravnine koja prolazi točkama B, C, C_1. Jednadžba ravnine je $y = 7$. Odredimo presjek ravnine i pravca XY. Iz $y = 7 = 10\lambda$ slijedi: $\lambda = \frac{7}{10}$ pa su koordinate sjecišta N jednake:

$$\begin{cases} x = 4 - 4\cdot\frac{7}{10} = \frac{6}{5}\\ y = 7\\ z = 4 - 4\cdot\frac{7}{10} = \frac{6}{5}, \end{cases}$$

odnosno: $N\left(\frac{6}{5}, 7, \frac{6}{5}\right)$.
Uvrštavanjem koordinata točaka M i N u jednadžbu za udaljenost dvaju točaka u prostoru dobivamo:

$$d(M,N) = \sqrt{\left(\frac{6}{5}-\frac{12}{5}\right)^2 + (7-4)^2 + \left(\frac{6}{5}-\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25}+9+\frac{36}{25}} = \frac{3\sqrt{33}}{5}.$$

Dakle, duljina dijela dužine $\overline{XY}$ koji se nalazi unutar kocke brida duljine 3 je $\frac{3\sqrt{33}}{5}$.
Sljedeći zadatak preuzet je iz izvora [5]:

Primjer 4.0.7. *Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. U kojem omjeru točka E dijeli brid $\overline{AB}$ ako ona leži u ravnini određenoj središtima strana $ABCD, ABB_1A_1$ i točkom D_1?*

Rješenje primjera: Smjestimo kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ u pravokutni koordinatni sustav tako da joj bridovi iz vrha D leže na koordinatnim osima. Tada su koordinate vrhova kocke:
$A(a,0,0), (B(a,a,o), C(0,a,0), D(0,0,0), A_1(a,0,a), B_1(a,a,a), C_1(0,a,a), D_1(0,0,a)$.
Neka je E središte strane $ABCD$. Kako je središte kvadrata sjecište dijagonala, koordinate središta su $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$.
Analogno, središte strane ABB_1A_1 je $F\left(a, \frac{a}{0}, \frac{a}{0}\right)$.
Odredimo jednadžbu ravnine određene točkama E, F i D_1:

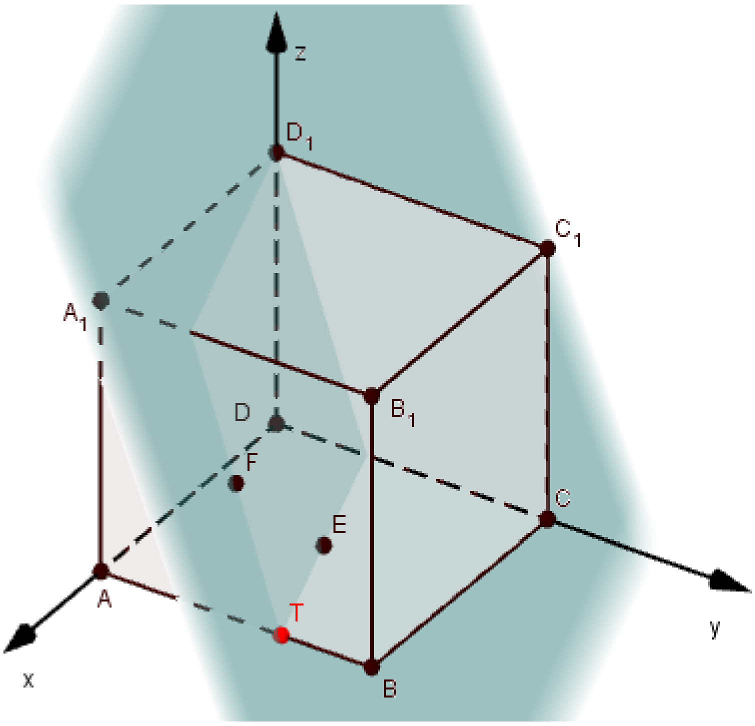
$$\begin{vmatrix} x-\frac{a}{2} & y-\frac{a}{2} & z-0 \\ a-\frac{a}{2} & \frac{a}{2}-\frac{a}{2} & \frac{a}{2}-0 \\ 0-\frac{a}{2} & 0-\frac{a}{2} & a-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{a}{2} & y-\frac{a}{2} & z \\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{a}{2}\right)\frac{a^2}{4} - \left(y-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right) + z\left(-\frac{a^2}{4}\right) &= 0 \\ \frac{a^2}{4}x - \frac{a^3}{8} - \frac{3a^2}{4}y + \frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{4}z &= 0 \\ \frac{a^2}{4}\left(x - \frac{a}{2} - 3y + \frac{3a}{2} - z\right) &= 0 \\ \frac{a^2}{4}(x-3y-z+a) &= 0. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s $\frac{a^2}{4} \neq 0$ dobivamo da je jednadžba ravnine određene točkama E, F i D_1:

$$x - 3y - z + a = 0. \tag{4.1}$$



Slika 4.9: Slika primjera

Odredit ćemo presjek te ravnine i pravca AB koji sadrži brid $\overline{AB}$. Jednadžba pravca AB u parametarskom obliku glasi:

$$\begin{cases} x = a - \lambda(a - a) \\ y = 0 - \lambda(a - 0) \\ z = 0 - \lambda(0 - 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

odnosno:

$$\begin{cases} x = a \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0, \end{cases}$$

što uvrštavanjem u jednadžbu ravnine 4.1 daje:

$$\begin{aligned} a - 3y - 0 + a &= 0 \\ -3y &= -2a \\ y &= \frac{2}{3}a. \end{aligned}$$

Iz dobivenog zaključujemo da se ravnina određena središtima strana $ABCD, ABB_1A_1$ i točkom D_1 i brid $\overline{AB}$ sijeku u točki $T\left(a, \frac{2}{3}a, 0\right)$ i koja taj brid dijeli u omjeru $2:1$.

Bibliografija

[1] N. Adžaga, P. Bakić, M. Bašić, M. Bombardelli, A. Copić, Ž. Hanjš, M. Juričić Devčić, I. Kokan, I. Krijan, A. Tafro, *Matematička natjecanja 2017./2018.*, Element, Zagreb, 2019.

[2] M. Bombardelli, Ž. Hanjš, K. A. Škreb, *Matematička natjecanja 2010./2011*, Element, Zagreb, 2012.

[3] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, Skripta, web stranici pristupljeno 10.04.2019.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf`

[4] M. Bombardelli, Ž. Milin Šipuš, *Analitička geometrija*, Predavanja i zadaci za vježbu, web stranici pristupljeno 15.03.2019.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/predavanja.pdf`

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2*, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2014.

[6] I. Ilišević, *Dokazi nekih stereometrijskih činjenica koordinatnom metodom*, Osječki matematički list, Vol 3. No. 1, Osijek, 2013, 61-71

[7] Z. Kurnik, *Visine tetraedra*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 5, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1996, 80-85

[8] Leksikografski zavod Miroslav Krleža, web stranici pristupljeno 25.04.2019.
`http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=14710`

[9] A. Marić, *Tetraedar*, Element, Zagreb, 2003.

[10] D. Palman, *Stereometrija*, Element, Zagreb, 2005.

[11] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[12] web stranici pristupljeno 15.03.2019.,
http://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/analiticka_geometrija.pdf

[13] Wikipedija, web stranici pristupljeno 08.05.2019.
https://hr.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

Sažetak

U ovom smo radu opisali koordinatnu metodu kojom smo dokazali razne stereometrijske teoreme. Na početku rada definiran je Kartetzijev koordinatni sustav u prostoru i navedene su osnovne metričke relacije koje smo koristili pri dokazivanju teorema i rješavanju zadataka. Naveli smo različite oblike jednadžbi pravaca i ravnina te opisali koordinatnu metodu.
Koordinatnom metodom smo dokazali teoreme o tetraedru koji su analogoni odgovarajućih teorema za trokut kao i razne teoreme o tetraedru vezane uz težišnice, težište, polovišta bridova i slično. Na kraju rada na srednjoškolskim problemima ilustrirana je koordinatna metoda.

Summary

This thesis is devoted to the coordinate method in stereometry, which was used to prove various theorems. In the first part of the thesis, we defined Cartesian coordinate system and noted all essential metric relations which we used in theorems prooving and problems solving. Furthermore, we stated different forms of equations of lines and plains and also described the coordinate method.
Using the coordinate method, we proved theorems about the tetrahedron which are analogous to some theorems for the triangle, as well as many other theorems for tetrahedron itself, regarding medians, centroid, midpoints etc. At the end of the thesis, the coordinate method was illustrated using secondary school problems.

Životopis

Rođena sam 10. prosinca 1995. godine u Bjelovaru. Pohađala sam Osnovnu školu Garešnica u Garešnici nakon koje sam 2010. godine upisala program opće gimnazije u Srednjoj školi August Šenoa, također u Garešnici. Maturirala sam 2014. godine. Iste godine upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu na kojem sam u srpnju 2017. godine završila preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički. Te sam godine upisala diplomski studij matematike, smjer nastavnički, na istom fakultetu.